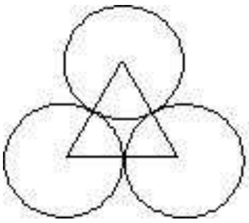
SUJETS 2000SOLUTIONS

Rallye mathématique de Première

SUJET 1

Réponse. Pour une plaque ayant jusqu'à 70 cm de côté, la disposition A est la plus avantageuse. A partir de 80 cm, c'est la disposition B qui est préférable.

Solution. Soit n le côté de la plaque mesuré en décimètres (diamètre d'un gâteau : 1 décimètre). Dans la disposition A où les centres des cercles sont aux sommets d'un réseau à mailles carrées, on place n² gâteaux.



Dans la disposition B, les centres sont aux sommets d'un réseau à mailles triangulaires (pavage du plan par des triangles équilatéraux). Le côté d'un triangle élémentaire est égal au diamètre des cercles ; sa hauteur en cm est donc 5 rac(3). Pour la hauteur occupée par x rangées de gâteaux, on obtient donc :

10 + 5(x-1)rac(3).

La première rangée comporte n gâteaux. Pour tenir dans la plaque, la deuxième rangée (ainsi que toutes les rangées d'ordre pair) doit comporter un gâteau de moins que la première. Le nombre total de gâteaux obtenu est ainsi égal à nx-x/2 si x est pair, ou à nx-(x-1)/2 si x est impair.
Si x>n (c'est à dire x au moins égal à n+1), ces valeurs sont supérieures à n² et cette deuxième disposition est plus avantageuse ; si x=n, la première disposition est évidemment plus avantageuse. Il reste à déterminer pour quelles largeurs de plaque, il est possible de placer un nombre de rangées x=(n+1). Ceci conduit à déterminer les valeurs de n pour lesquelles

10n > 10+5nrac(3),
soit n > 2/(2-rac(3)).

Ainsi, puisque n doit être entier, on obtient n supérieur ou égal à 8.

SUJET 2

Réponse. La troisième ligne du tableau constitue une suite dite arithmético-géométrique, qui conduit pour le terme demandé à la valeur f(3, 1997) = 2^2000 - 3.

Solution. A partir de f(0, n) = n+1, on obtient

f(1, n) = f(0, f(1, n-1)) = f(1, n-1) + 1.

Comme f(1, 0) = f(0, 1) = 2, il en résulte f(1, n) = n + 2.

> *Remarque : Les égalités proposées dans l'énoncé doivent être étendues à des valeurs quelconques de n, sans limitation à 1997. Sinon, on ne peut rien dire de f(1, 1997) = f(0, f(1, 1996)) = f(0, 1998). Nous faisons cette extension, ici ainsi que pour la suite du problème.*

Par suite,

f(2, n) = f(1, f(2, n-1)) = f(2, n-1) + 2.

Puisque f(2, 0) = f(1, 1) = 3, il en résulte f(2, n) = 2n + 3.
Enfin,

f(3, n) = f(2, f(3, n-1)) = 2f(3, n-1) + 3.

Et f(3, 0) = f(2, 1) = 5. Pour expliciter f(3, n) en fonction de n, posons g(n) = f(3, n) + 3 (une telle transformation est usuelle pour les suites dites arithmético-géométriques ; il s'agit de se ramener à des suites géométriques). En remplaçant f(3, n) et f(3, n-1) respectivement par g(n) - 3 et g(n-1) - 3 dans l'égalité de récurrence ci-dessus, on obtient en effet

g(n) - 3 = 2(g(n-1) - 3) + 3,
d'où g(n) = 2g(n-1).

Donc $g(n)$ est une suite géométrique de raison 2, ayant pour premier terme $g(0) = 8 = 2^3$. Par conséquent, $g(n) = 2^{n+3}$ et en particulier $g(1997) = 2^{2000}$.
Finalement

$$f(3, 1997) = 2^{2000} - 3.$$

SUJET 3

Solution. La solution s'appuie sur une triangulation. Plusieurs égalités d'aires de triangles peuvent être mises en évidence sur la figure, qui renvoient au classique résultat général suivant.

> *Théorème général : Soit S un point et d une droite ne passant pas par S. Tous les triangles du type SXY, où X et Y sont deux points de la droite d tels que le segment XY ait une longueur donnée, ont la même aire.*

Par exemple, on a l'égalité d'aires $\mathcal{A}(EFG) = \mathcal{A}(FBG)$, puisque les segments EF et FB sont de même longueur. De même, $\mathcal{A}(EGH) = \mathcal{A}(EHD)$.
Comme le quadrilatère EFGH est convexe puisque ABCD est convexe, son aire est la somme des aires des triangles EFG et EGH. D'où

$$\mathcal{A}(EFGH) = \mathcal{A}(EFG) + \mathcal{A}(EGH)$$

et donc

$$2\mathcal{A}(EFGH) = \mathcal{A}(EFG) + \mathcal{A}(FBG) + \mathcal{A}(EGH) + \mathcal{A}(EHD) = \mathcal{A}(EBGD).$$

Or

$$\mathcal{A}(ABCD) = \mathcal{A}(EBGD) + \mathcal{A}(AED) + \mathcal{A}(BCG).$$

Mais, en se référant au théorème d'égalités d'aires de triangles, on peut écrire

$$3\mathcal{A}(AED) = \mathcal{A}(ABD),$$
$$3\mathcal{A}(BCG) = \mathcal{A}(BCD).$$

On en déduit

$$3\mathcal{A}(EBGD) = 3\mathcal{A}(ABCD) - 3\mathcal{A}(AED) - 3\mathcal{A}(BCG) = 2\mathcal{A}(ABCD).$$

Mais on a vu que $\mathcal{A}(EBGD) = 2\mathcal{A}(EFGH)$, ce qui entraîne alors l'égalité demandée :

$$3\mathcal{A}(EFGH) = \mathcal{A}(ABCD).$$

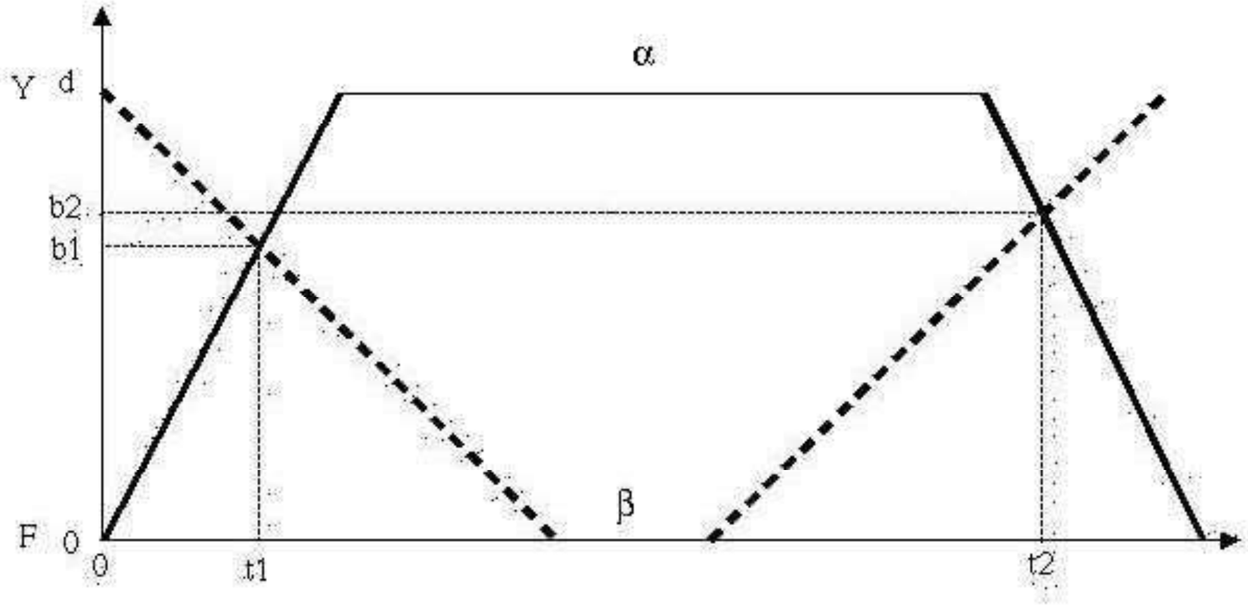
>

Réponses

Sujet 1. La distance Fromentine - Ile d'Yeu est de 22 km.
Sujet 2. Pour tout n entier positif autre que 2, 3 ou 5, un carré est n-carrelable.
Sujet 3. Le produit abc est égal à 441.

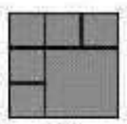
Solutions

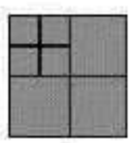
Sujet 1.
Un graphique temps - distances permet de représenter la situation décrite par l'énoncé. Sur l'axe des temps, en abscisse, on a indiqué les instants de croisement t1 et t2. Sur l'axe des distances (Fromentine étant placée à l'origine 0 et Yeu à la distance d à trouver), on a indiqué par b1 et b2 les emplacements des bouées. *Note à l'intention de ceux qui sont déjà allés ou se rendront à Port-Joinville : on ne peut apercevoir de telles bouées indiquant des distances, qui plus est en kilomètres plutôt qu'en milles, que si l'on est candidat à un Rallye Mathématique !* Sur le graphique, les trajets de l'Amporelle, dont on notera V1 la vitesse, sont représentés par un trait continu épais et ceux de l'Insula Oya, de vitesse V2, par un trait discontinu également épais. Sur le graphique, les durées d'accostage sont désignées par la lettre grecque alpha pour l'Amporelle et par la lettre grecque bêta pour l'Insula Oya.

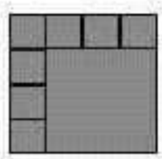


Le croisement des bateaux à l'instant t_1 permet d'écrire la relation : $V_1(d - b_1) = V_2\, b_1$, soit $7V_1 = (d - 7)\, V_2$.
A l'instant t_2, la distance parcourue par l'Amporelle est : $V_1(t_2 - \text{alpha}) = d + (d - b_2) = 2d - b_2$.
Au même instant t_2, la distance parcourue par l'Insula Oya est : $V_2(t_2 - \text{bêta}) = d + b_2$.
L'énoncé indique : $t_2 - \text{bêta} = 3(t_2 - \text{alpha})$. D'où : $d + b_2 = 3V_2(t_2 - \text{alpha}) = 21V_1(t_2 - \text{alpha})/(d - 7)$.
Il en résulte : $d + b_2 = 21(2d - b_2)/(d - 7)$, soit : $(d - 7)(d + 16{,}5) = 21(2d - 16{,}5)$
et, après multiplication par 2 : $(d - 7)(2d + 33) = 21(4d - 33)$.
Cette équation s'écrit aussi : $2d^2 - 65d + 462 = 0$, ou encore : $(d - 22)(2d - 21) = 0$.
La valeur (en km) d = 22 est bien une réponse au problème, alors que la valeur 10,5 est à rejeter (les bacs ne dépassant pas l'île).

Sujet 2.
Il est immédiat de partager un carré en quatre, grâce aux médiatrices de ses côtés. On remarque que, si un carré était au départ n-carrelé et si l'on a partagé ainsi en quatre l'un quelconque des morceaux du carrelage, le carré considéré est alors (n + 3)-carrelé.


6


7


8

On voit sur la figure un 6-carrelage, un 7-carrelage (qui utilise le partage en quatre) et un 8-carrelage. Grâce à la remarque ci-dessus, qui permet une **récurrence** de 3 en 3, il en résulte qu'un carré est n-carrelable pour tout $n > 5$. Pour achever l'étude, il convient d'établir que 2, 3 et 5 ne conviennent pas pour carreler. Nous ne détaillons pas ici, nous contentant d'indiquer une piste pour une démonstration rigoureuse : considérer le ou les sommets que le carré considéré et un carreau du carrelage devraient avoir en commun.

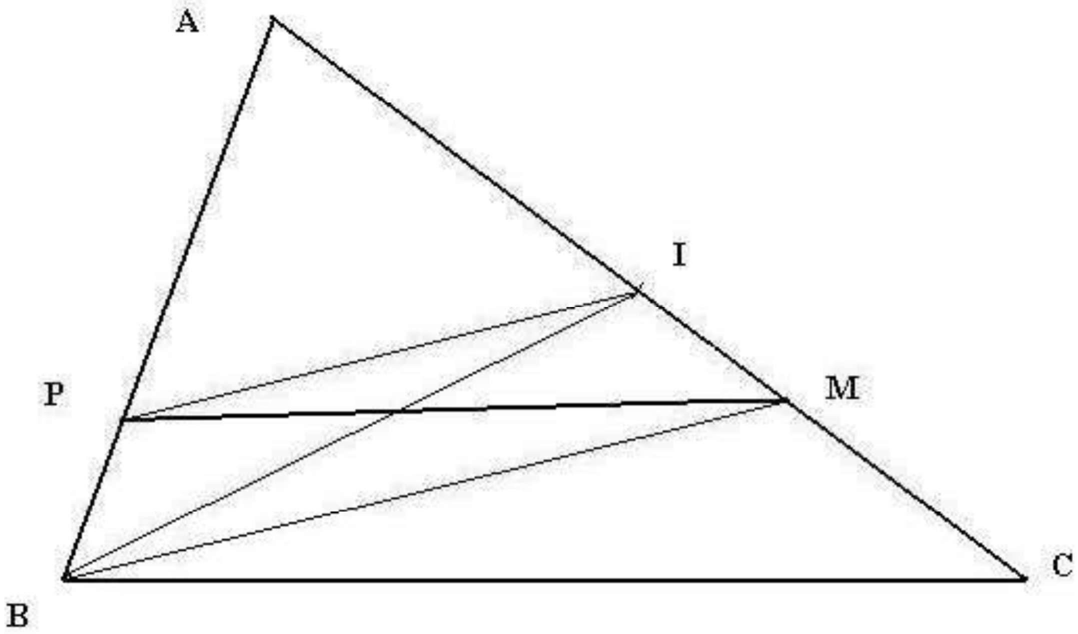
Sujet 3.
D'une manière générale, notons XYZ l'aire du triangle de sommets X, Y et Z. Des rapports d'aires pour des triangles de même base sont égaux à des rapports de longueurs :
$CPB/ABC = d/(d + a)$, $APC/ABC = d/(d + b)$, $APC/ABC = d/(d + c)$.
Il en résulte que $d[1/(d + a) + 1/(d + b) + 1/(d + c)] = 1$.
Après réduction au même dénominateur $(d + a)(d + b)(d + c)$ et développement, on obtient la condition :
$2d^3 + (a + b + c)d^2 = abc$.
La substitution des valeurs de l'énoncé conduit alors à $abc = 441$.
Mais cela ne nous dit pas si un triangle donnant lieu à ces valeurs existe effectivement...

Rallye mathématique d'Alsace 2002

Classe de Première

Solution des exercices pour la classe de Première

Exercice 1



Menons par I la parallèle à la droite MB. Elle rencontre la côté AB en un point P. Le triangle APM est réunion des triangles API et IPM (en particulier, l'aire de APM est la somme des aires de API et IPM). Et l'aire du triangle IPM est elle-même égale à l'aire du triangle IPB (les deux triangles ont la même base IP et leurs sommets M et B sont situés sur une parallèle à IP). Or la réunion des triangles API et PIB constitue le triangle ABI. Et puisque I est le milieu de AC, l'aire du triangle ABI est la moitié de celle du triangle ABC. Finalement, l'aire du triangle APM est la moitié de celle du triangle ABC.

Exercice 2

L'ultime somme contenue dans la cassette est de la forme $1 + 3x$, où x est un nombre entier supérieur ou égal à 1. A partir de là, remontons le temps pour reconstituer les étapes successives de l'évolution subie par le contenu de la cassette.

- Le contenu que le pirate 3 avait trouvé était $1 + (1 + 3x) \times 3/2$, c'est à dire en réduisant : $(5 + 9x)/2$.
- Le contenu que le pirate 2 avait trouvé était $1 + [(5 + 9x)/2] \times 3/2$, c'est à dire en réduisant : $(19 + 27x)/4$
- Le contenu initial, trouvé par le pirate 1, était $y = 1 + [(19 + 27x)/4] \times 3/2$, c'est à dire en réduisant :

$$y = (65 + 81x)/8.$$

Ce contenu initial y doit être entier. Nous sommes ainsi conduits à l'équation en entiers (on dit aussi *équation diophantienne*) :

$$8y - 81x = 65.$$

Remarquant que $8 \times 10 - 81 = -1$, nous obtenons (en multipliant par -65) la solution particulière suivante de l'équation :

$$y = -650 \text{ et } x = -65,$$

à partir de laquelle la solution générale s'écrit :

$$y = -650 + 81k \text{ et } x = -65 + 8k.$$

Cette résolution a été envisagée jusqu'à présent pour les entiers relatifs sans considération de signes. Il convient à présent de prendre en compte le fait que l'on cherche des entiers positifs. La plus petite valeur de k qui convienne pour cela est k = 9, qui conduit à x = 7 et y = 79, qui est la réponse cherchée.

Pouravoir l'esprit parfaitement tranquille, on peut vérifier : Au départ, la cassette contient 79 louis d'or. Le premier pirate jette un louis et prend le tiers des 78 restant, soit 26 ; il en reste alors 52. Le second pirate jette un louis et prend le tiers des 51 restant, soit 17 ; il en reste alors 34. Le troisième pirate jette un louis et prend le tiers des 33 restant, soit 11 ; il en reste alors 22. Enfin, les trois pirates ensemble jettent un louis et se partagent les 21 restant, à raison de 7 pour chacun.

Exercice 3

On remarque tout d'abord que 4 = 2 + 2, et 2 × 2 est égal à 4, puis que 5 = 3 + 2, et 3 × 2 est plus grand que 5. Les entiers plus grands s'écrivent soit sous la forme 2p s'ils sont pairs, soit sous la forme 2p + 1 = p + (p + 1) s'ils sont impairs, avec p > 2.
Alors p × p > 2p et p × (p + 1) > 2p + 1. Autrement dit, un entier *a* plus grand que 4 s'exprime comme somme de deux entiers dont le produit est plus grand que *a*. Et 4 lui-même peut être remplacé par 2 + 2, dont le produit est égal à 4.

Il en résulte que quand un entier N sera exprimé comme somme de termes donnant lieu au plus grand produit possible, ces termes pourront tous être pris plus petits que 4. Les valeurs à considérer pour les termes dans ces conditions sont donc 1, 2 et 3.

La valeur 1 ne peut pas apparaître plus d'une fois, car 1 + 1 = 2, et 2 > 1 × 1 = 1.

La valeur 2 ne pas apparaître plus de deux fois, car 2 + 2 + 2 = 6 = 3 + 3, et 2 × 2 × 2 = 8 < 9 = 3 × 3.

A partir de là, on est conduit à des répétitions du terme 3, ce qui conduit aux valeurs suivantes pour le maximum que le produit puisse atteindre :

- Si N = 3n - 1, n > 1, le terme 3 peut être répété (n - 1) fois et il reste alors 2 ; le produit maximal obtenu est ainsi $3^{n-1} \times 2$.

- Si N = 3n, le terme 3 peut être répété n fois et le produit maximal obtenu est ainsi 3^n.

- Si N = 3n + 1, il convient de comparer le produit obtenu en répétant n fois le terme 3, après quoi il reste 1, et le produit obtenu en ne répétant que (n - 1) fois le terme 3, après quoi il reste 4 = 2 + 2. Dans le premier cas, on obtient comme précédemment 3^n et dans le second, on obtient $3^{n-1} \times 4$. C'est le second produit qui l'emporte et qu'il convient donc de préférer.

RALLYE MATHÉMATIQUE D'ALSACE 2003
Énoncés de la 30e édition

Classe de Première

RÉPONSES ET SOLUTIONS

RÉPONSE A L'EXERCICE 1

L'aire maximale d'un triangle inscrit dans le carré est 1/2..

Voir la solution

RÉPONSE A L'EXERCICE 2

La combustion des bougies est réalisable dans les conditions énoncées si et seulement si le nombre n de bougies est impair.

Voir la solution

RÉPONSE A L'EXERCICE 3

Le roi dut fournir 1 grain de riz.

Voir la solution

SOLUTION DE L'EXERCICE 1

Partons de trois points distincts K, L et M, quelconques sur les côtés du carré considéré. Soit A le sommet du carré le plus éloigné de la droite LM. La distance de A à la droite LM est évidemment supérieure (au sens large) à celle de K à cette même droite, de telle sorte que l'aire du triangle ALM est supérieure à celle du triangle KLM. Soit alors B le sommet du carré le plus éloigné de la droite AL. On remarque que nécessairement AB est un côté du carré. L'aire du triangle ABM est supérieure à celle du triangle ALM. Quel que soit alors le choix de M sur le côté parallèle à AB, l'aire du triangle ABM est égale à 1/2. Et sinon cette aire est inférieure à 1/2.

Récapitulons : On peut agrandir l'aire de tout triangle dont deux sommets ne sont pas deux sommets voisins du carré ; un triangle dont deux sommets sont des sommets voisins du carré a une aire au plus égale à 1/2. La valeur 1/2 représente donc le maximum de l'aire, maximum atteint pour une infinité de triangles.

Revenir aux énoncés.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2

Prenons pour unité l'*heure×bougie*. Par exemple, deux bougies qui brûlent toutes les deux pendant une heure consomment 2 *heures×bougies*. Au bout des n dimanches, le nombre d'*heures×bougies* consommées est, d'après l'énoncé :

1 + 2 + ... + (n-1) + n,

somme qui est égale à n(n+1)/2 selon une formule bien connue. Ce nombre sera un multiple de n à la condition que (n+1) soit divisible par 2, c'est à dire que n soit impair.

Réciproquement si n est impair, une combustion des bougies respectant les conditions de l'énoncé peut être organisée par exemple grâce à un tableau comme celui présenté pour 9 bougies.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	7	8	9	1	2	3	4
6	7	8	9	1	2	3	4	5
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	1	2	3	4	5	6	7
9	1	2	3	4	5	6	7	8

Un tableau de marche pour 9 bougies

Les bougies ont été numérotées de 1 à n (dans l'exemple, n = 9). On voit comment le tableau est rempli, en passant d'une ligne à la suivante par une permutation circulaire. Lorsque les cases au-dessus de la diagonale (les cases colorées) ont été éliminées, les bougies à utiliser un dimanche de numéro donné sont celles de la ligne commençant par ce numéro : par exemple pour nos 9 bougies, on fera brûler le 6-ième dimanche les bougies numérotées 6, 7, 8, 9, 1, 2. Le tableau est symétrique par rapport à la diagonale ; sur la diagonale, les numéros évoluent de deux en deux (1, 3, 5, etc.) de telle sorte que pour n impair, c'est à dire n = 2p + 1, tout numéro apparaît une fois sur la diagonale. Par conséquent, toutes les bougies seront bien utilisées le même nombre de dimanches, à savoir p + 1 (dans l'exemple avec 9 bougies, chacune est utilisée 5 dimanches sur les 9).

Il n'y a pas qu'une seule procédure possible. Ainsi, pour 5 bougies, voici deux présentations dimanche après dimanche des bougies à utiliser, toutes deux acceptables :

1-23-345-4512-51234 (méthode précédemment indiquée), 1-12-345-2345-12345.

Revenir aux énoncés.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3

La somme de trois puissances consécutives de 2 est un multiple de 7. En effet, une telle somme s'écrit

$2^a(1 + 2 + 4) = 7 \times 2^a$.

Or $64 = 21 \times 3 + 1$. Ainsi, dans la somme des 64 puissances de 2 depuis $2^0 = 1$ jusqu'à 2^{63}, on peut former 21 groupes distincts de trois puissances de 2 consécutives, dont la somme est un multiple de 7, et il en reste alors une isolée. Le plus simple est de procéder à ces groupements en remontant de la fin (2^{63}) vers le début, ce qui amène à prendre en compte toutes les puissances de 2 en jeu sauf la première, à savoir $2^0 = 1$. Le reste dans la division par 7 de $1 + 2 + ... + 2^{63}$ est ainsi mis en évidence : il est égal à 1. Le nombre de grains de riz fournis par les seigneurs étant le multiple de 7 immédiatement inférieur à la somme considérée, il ne manque donc qu'un unique grain de riz que le roi doit fournir.

Revenir aux énoncés.

CORRIGE DU RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE 2004

Sujets de Première

Sujet 1

Comment régler l'addition

On dispose de pièces de 1, 2, 5, 10, 20 et 50 centimes ainsi que de 1 euro en aussi grande quantité que l'on veut.
On suppose qu'il est possible de payer une somme de m centimes avec n pièces.
Est-ce que l'on peut payer une somme de n euros avec m pièces ?

Corrigé

Considérons une somme quelconque en centimes réalisée par un certain nombre de pièces. Par exemple avec 3 pièces de 5 centimes, 4 de 2 centimes et 2 de 1 centime, soit un total de 9 pièces, on obtient 25 centimes. Remplaçons à présent ces pièces selon le mode d'emploi suivant :

- à chaque pièce de 5 centimes j'associe 5 pièces de 20 centimes,
- à chaque pièce de 2 centimes j'associe 2 pièces de 50 centimes,
- à chaque pièce de 1 centime j'associe 1 pièce de 1 euro (soit 100 centimes).

On a ainsi substitué à chaque pièce de départ la valeur de 1 euro réalisée par un nombre de pièces égal à la valeur en centimes de cette pièce de départ. Dans le cas présent, on aboutira donc à 9 euros, réalisés par un nombre de pièces égal à la somme de départ en centimes, c'est à dire 25.

La procédure est la même pour le cas général : il suffit de compléter l'indication de substitution pour les pièces qui ne figuraient pas dans l'exemple étudié :

- à chaque pièce de 1 euro (100 centimes) j'associe 100 pièces de 1 centime,
- à chaque pièce de 50 centimes j'associe 50 pièces de 2 centimes,
- à chaque pièce de 20 centimes j'associe 20 pièces de 5 centimes,
- à chaque pièce de 10 centimes j'associe 10 pièces de 10 centimes.

La raison de la réussite de l'opération est qu'à chaque valeur de pièce en centimes, il correspond une valeur dont le produit avec la première est égal à 100.

Complément : La réalisation de n euros par m pièces est en général loin d'être unique. La valeur d'une pièce étant d'au moins 1 centime et d'au plus 1 euro, soit100 centimes, la somme m en centimes que l'on paye avec n pièces est au moins égale à n et au plus égale à 100n. Or on peut voir que, hormis l'impossibilité de payer une somme de 1 euro avec 3 pièces, il est toujours possible de payer une somme de n euros avec un nombre m de pièces compris entre n et 100n.

Une idée peut être de partir du plus petit nombre possible de pièces, c'est à dire n pièces de 1 euro chacune, et d'opérer des substitutions pour augmenter ce nombre de pièces. Pour augmenter de 1 le nombre de pièces, on dispose de plusieurs possibilités de base, consistant à remplacer 1 pièce par 2, ou 2 par 3, ou 3 par 4 :

- 1 pièce de 1 euro (ou : 100 centimes) par 2 de 50 centimes,
- 1 pièce de 20 centimes par 2 de 10 centimes,
- 1 pièce de 10 centimes par 2 de 5 centimes,
- 1 pièce de 2 centimes par 2 de 1 centime,

- 1 pièce de 50 centimes et 1 de 10 centimes par 3 de 20 centimes,
- 1 pièce de 5 centimes et 1 de 1 centime par 3 de 2 centimes,

- 3 pièces de 50 centimes par 1 de 1 euro, 2 de 20 centimes et 1 de 10 centimes,
- 3 pièces de 5 centimes par 1 de 10 centimes, 2 de 2 centimes et 1 de 1 centime,

L'éventail des possibilités ainsi offertes permet de résoudre le problème provenant du fait qu'une conversion directe d'une pièce de 50 centimes ou d'une pièce de 5 centimes ne conduit pas à augmenter le nombre de pièces en jeu de 1, mais de 2 (ou plus). Seul le cas où la variété des pièces à disposition serait quasiment inexistante constitue alors un obstacle. Pour un nombre entier d'euros, il n'y a impossibilité que si on est devant un nombre de pièces de 50 centimes inférieur à 3 et s'il n'y pas de pièce de 10 centimes en accompagnement : c'est la situation où l'on est seulement en présence de deux pièces de 50 centimes, que l'on ne pas remplacer par trois pièces totalisant la même valeur.

Comme on ne peut pas payer 3 centimes avec une seule pièce, la seule objection possible disparaît. L'étude générale montre que la convaincante démonstration précédemment faite n'avait finalement qu'un intérêt réduit. En mathématiques et pas seulement dans les arts, pourrait-il parfois y avoir une gratuité de l'esthétique ?

Supplément : Pourrait-on poser le même problème aux Etats-Unis, où le dollar est subdivisé différemment de l'euro (il y a par exemple une pièce de 25 cents = *one quarter*) ?

Sujet 2

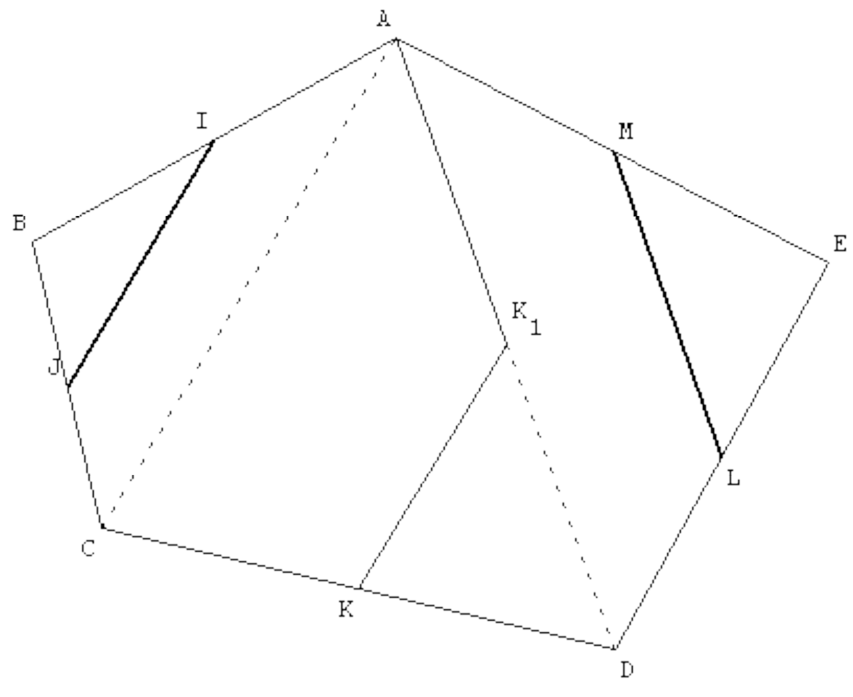
Construction d'un pentagone

On dispose de 5 points I, J, K, L, M du plan, sommets d'un pentagone convexe, c'est à dire tels que 3 sommets parmi les 5 ne sont jamais alignés et tout segment reliant 2 sommets parmi les 5 est contenu dans le pentagone.

Proposer une construction d'un pentagone ABCDE tel que les points I, J, K, L et M soient respectivement les milieux des côtés [AB] , [BC] , [CD] , [DE] et [EA] .

Corrigé

Partons d'un pentagone ABCDE dont les milieux des côtés seraient les points I, J, K, L et M, et essayons, à partir des milieux de construire l'un des sommets du pentagone.



Déterminons les trois triangles ABC, ACD et ADE.

® Dans le triangle ABC, I et J sont les milieux des côtés [BA] et [BC] , d'après le théorème des milieux, on peut affirmer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

® Soit K_1 l'image du point K par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$. Donc $\overrightarrow{KK_1} = \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

® Dans le triangle *DAC*, *K* est le milieu de [*DC*], et $\overrightarrow{KK_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$. D'après la réciproque du théorème des milieux, K_1 est le milieu de [*DA*]. On a la relation $\overrightarrow{K_1A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$

® Dans le triangle *EDA*, *L* et *M* sont les milieux de [*ED*] et [*EA*] , d'après le théorème des milieux , on a l'égalité : $\overrightarrow{LM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$.

Soit $\overrightarrow{K_1A} = \overrightarrow{LM}$. Le point *A* est l'image du point K_1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{LM}$.

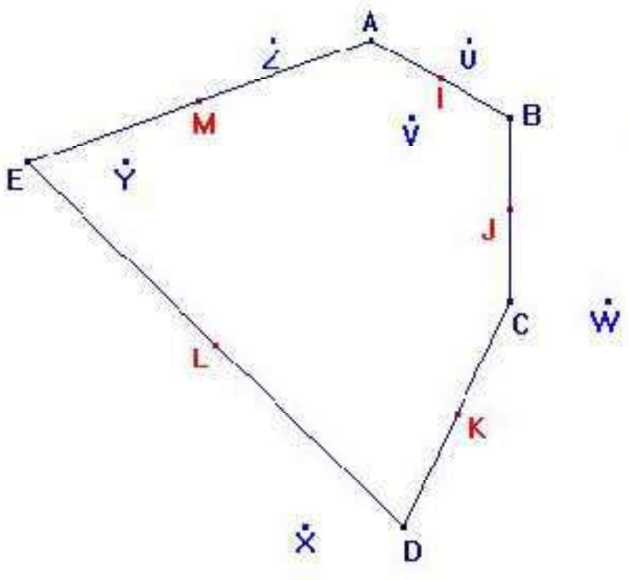
Synthèse :

-

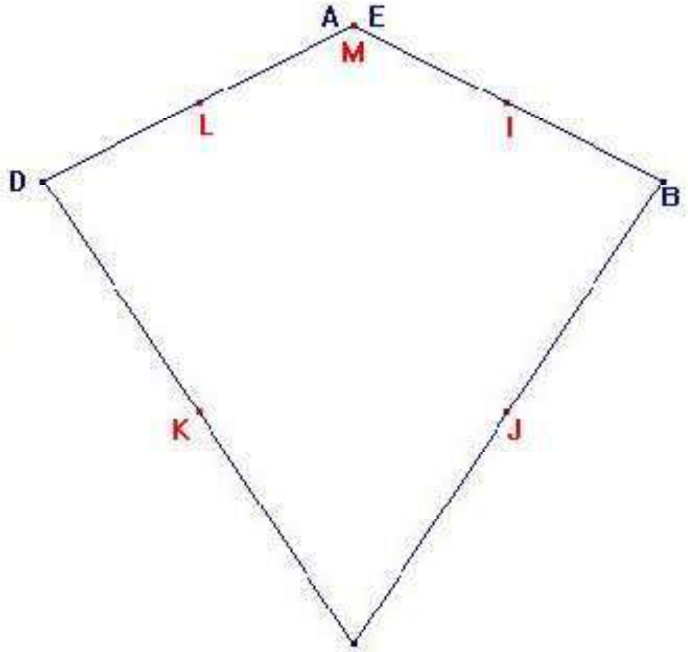
Le point *A* est l'image du point *K* par la translation de vecteur $\overrightarrow{JI}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{LM}$.

Pour obtenir les autres sommets, il suffit d'effectuer les symétries centrales successives par rapport aux milieux des côtés.

Mais les conditions de l'énoncé ne nous assurent pas d'obtenir toujours un véritable pentagone. Si on considère un parallélogramme IJKL et un point quelconque M, qui peut donc très bien être tel que IJKLM est un pentagone convexe, la composée des symétries respectives par rapport à I, J, K, L et M n'est autre que la symétrie par rapport à M. On tombe en tel cas sur A et E tous deux en M. Le « pentagone » obtenu serait alors ABCDA.



Situation générale



Un drôle de pentagone

Sujet 3

La somme constante

On numérote les cases d'un échiquier carré de 31 lignes et 31 colonnes par les entiers de 1 à 31^2 en décrivant successivement les 31 lignes de gauche à droite.
On choisit 31 cases en en prenant une seule sur chaque ligne et sur chaque colonne.
Montrer que la somme de leurs numéros est indépendante du choix des cases.

Corrigé

Pour un échiquier 10´10 à cases numérotées de 0 à 99, le résultat serait évident, puisque les colonnes correspondraient aux unités, de 0 à 9, et les lignes aux dizaines, de 0 à 9 également. En prenant 10 cases à raison d'une seule sur chaque ligne et chaque colonne, on obtiendrait toutes les valeurs d'unité de 0 à 9 et toutes les valeurs de dizaine de 0 à 9. La somme des numéros serait donc égale à 1´(0 + 1 + 2 + … + 9) + 10´(0 + 1 + 2 + … + 9) = 11´(9´10/2) = 495.

Le cas considéré est de même nature à ceci près que l'on évolue de 31 au lieu de 10 quand on passe d'une ligne à la suivante et que l'on commence à 1 au lieu de 0. On aboutira donc au résultat :

1´(1 + 2 + … + 31) + 31´(0 + 1 + … + 30) = 31 + 32´(30´31/2) = 14911.

Correction du Rallye Premières 2005

Corrigé de l'Exercice 1

Le cube minimal contenant les deux sphères est tel que les centres I et J des sphères soient sur la diagonale de ce cube. Appelons le cube ABCDEFGH et *a* la longueur d'un de ses côtés. On coupe le cube par le plan (ADG). Les points I et J sont sur [AG]. En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle AEG, on obtient AG= $\sqrt{3}a$.
Soit I' le projeté orthogonal de I sur (AC) : c'est aussi le point de tangence de la sphère avec le plan ABCD. En appliquant le théorème de Thalès dans le triangle AGC, avec (II') parallèle à (CG), on a $\frac{II'}{GC}=\frac{AI}{AG}=\frac{1}{a}=\frac{AI}{\sqrt{3}a}$, d'où $AI=\sqrt{3}$.

Ainsi $AG=AI+IJ+JG=2\left(1+\sqrt{3}\right)$. Finalement $a=\frac{2\sqrt{3}+6}{3}$.

Corrigé de l'Exercice 2

On veut montrer qu'on peut les ordonner de 2^{n-1} façons.

Le dernier (n-ième) entier doit être soit supérieur à tous les autres, soit inférieur à tous les autres, donc soit c'est n, soit c'est 1. On a par conséquent 2 choix.

Puis, plaçons l'avant dernier : il doit être soit supérieur aux (n-2) premiers, soit inférieur aux (n-2) premiers, donc soit c'est n-1, soit c'est 2. On a par conséquent 2 choix.

Et ainsi de suite. On a par conséquent deux choix pour chaque entier, sauf le premier pour lequel il n'y aura qu'une possibilité. On a donc 2…2 = 2^{n-1} façons de les ordonner.

Corrigé de l'Exercice 3

Il y a 525-42=477 étudiantes et 147-25=122 étudiantes mariées. Donc 477-122=355 étudiantes non mariées.
Or, il y a 470-86=384 femmes mariées et 1000-312=688 femmes donc 688-384=304 femmes non mariées.
On aboutit à une contradiction, le nombre d'étudiantes non mariées étant supérieur au nombre de femmes non mariées.

Indications de solution
Rallye mathématique d'Alsace 2006
22 mars 2006

Classe de Première

Exercice 1

Il y en a 1601.

Exercice 2

1. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=14$ donne $x+\frac{1}{x}=4$.
2. Les relations $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$ et $x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$ permettent d'obtenir les valeurs 52 et 194.
3. La relation de récurrence $x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}=\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)$ permet d'obtenir les valeurs demandées

Exercice 3

Il faut et il suffit que n soit pair.

Indications de solution

Rallye mathématique d'Alsace 2007
21 mars 2007

Classe de Premières

Exercice 1

Cet exercice a été abordé et correctement traité dans de nombreuses copies. Les triplets pythagoriciens, c'est-à-dire les triplets d'entiers naturels (a, b, c) tels que $a^2+b^2=c^2$, ont été vus par les candidats et permettaient un traitement élégant de ce problème.

Ainsi, notant que

$13^2 = 12^2 + 5^2$, on a $13^{2006} = (12^2 +5^2)^{1003} > 12^{2006} + 5^{2006}$.

Ensuite

$$13^{2007} > 13(12^{2006} + 5^{2006})$$
$$> 12^{2007} + 5^{2007}$$

Une récurrence facile permet de montrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $13^n > 12^n + 5^n$, sur le modèle de ce qui précède. Le phénomène observé se généralise avec les triplets pythagoriciens.

Conclusion : Les copies ont réservé de bonnes surprises. Les raisonnements effectués sont en général corrects et le phénomène bien vu. C'est l'exercice le mieux traité en première.

Exercice 2

Là encore de bonnes solutions ont été observées. L'illustrateur peut commencer en 2008 et donc publier 2008 dessins pour ce premier album. Mettons de côté ce cas très particulier.

Notons n le nombre de pages du 1er album et k+1 le nombre d'albums publiés en comptant celui de 2008.

Nous avons donc $n+(n+1)+\ldots+(n+k)=2008$ c'est-à-dire $(2n+k)(k+1)=2^4 \cdot 251$

La parité impose alors $2n+k=251$ et $k+1=16$, ce qui donne $n=118$ et $k=15$.

Le premier album comptait donc 118 pages et sa date de publication est 1993. C'est 1992 si on considère qu'en 2008, au moment du compte, il n'y a pas encore eu d'album publié.

Conclusion : Les entiers 118 et 1993 ont été souvent obtenus. Dans certaines copies, on se borne à vérifier que c'est un cas de figure possible, sans montrer que c'est le seul. Une solution correcte demandait naturellement cette unicité (en dehors du cas de début de parution en 2008…)

Exercice 3

Cet exercice est de loin celui qui a donné les moins bons résultats. L'énoncé n'a pas toujours été compris. Passons sur les « preuves » du type 2010>2007 donc il y a d'avantage de plaques de type 2010 que de plaques de type 2007.

Une plaque de type 2010 est donc la donnée de $(X,Y,Z) \in \mathbb{N}^3$ tels que $X \leq Y \leq Z$, avec $X+Y>Z$ et $X+Y+Z=2010$.

Notons $E_{2007}=\{(X,Y,Z) \in \mathbb{N}^{*3}, X\leq Y\leq Z, X+Y+Z=2007\}$ et E_{2010} analogue. Il s'agit de vérifier, afin de voir que les nombres cherchés sont égaux, que les cardinaux de E_{2007} et de E_{2010} sont les mêmes.

Si $(X,Y,Z) \in E_{2007}$, montrons que $(X+1,Y+1,Z+1) \in E_{2010}$.

$X+Y+Z=2007$ donc $(X+1) + (Y+1) + (Z+1) = 2010$.

$X \leq Y \leq Z$ donc $X+1 \leq Y+1 \leq Z+1$.

De plus $(X+1)+(Y+1) > Z+2 > Z+1$ d'où le résultat.

Réciproquement, si $(a,b,c) \in E_{2010}$, montrons que $(a-1, b-1, c-1) \in E_{2007}$.

$a+b+c = 2010$ donc $(a-1)+(b-1)+(c-1) = 2007$.

$a \leq b \leq c$ donc $a-1 \leq b-1 \leq c-1$

$a+b \geq c+1$, car $(a,b,c,) \in E_{2010}$.

Si $a+b = c+1$, alors $2c+1 = 2010$, ce qui est exclu (parité).

On a donc $a+b \geq c+2$ donc $(a-1)+(b-1) > c-1$.

Il reste à voir que $a-1 \geq 1$ donc que $a \geq 2$.

Si $a=1$, alors $1+b>c$ donc $b \geq c$. Or $b \leq c$ donc $b=c$ et $2b+1=2010$, ce qui est exclu.

Pour suite, on a le résultat voulu. Tout ceci prouve que l'application $(X,Y,Z) \longmapsto (X+1, Y+1, Z+1)$ réalise une bijection entre E_{2007} et E_{2010}. L'égalité des cardinaux en résulte.

Conclusion : Cet exercice était plus difficile que les deux autres. Il fallait voir que pour deux entiers, l'inégalité stricte $a < b$ s'écrit $a \leq b-1$. Une bonne description des ensembles considérés était déjà une difficulté pour la résolution de ce petit problème. La solution proposée utilise une bijection, outil naturel pour obtenir l'égalité des deux cardinaux. Ce vocabulaire n'était évidemment pas exigé des élèves de première. Nous avons rencontré quelques éléments de réponse, mais pas de résolution entièrement satisfaisante.

Indications de solution

Rallye mathématique d'Alsace 2008
26 mars 2008

Classe de Premières

Exercice 1

L'énoncé l'indique : on s'intéresse ici seulement à des questions de parité.

On étudiera comment varie la parité de la somme des nombres qui restent écrits.

A la dernière étape, il reste un seul nombre égal à cette somme.

On aura donc la parité cherchée.

Au départ, il s'agit de la somme des entiers de 1 à 2008 (1004 pairs et 1004 impairs), donc cette somme est paire.

Si deux nombres pairs sont choisis, leur différence est paire, la somme reste paire

Si deux nombres impairs sont choisis, leur différence est paire, la somme reste paire.

Si un nombre pair et un nombre impair sont choisis, leur différence est impaire, la somme reste paire.

La parité de la somme ne change pas au cours de ce processus.

La dernière somme étant le dernier entier qui reste, c'est donc un nombre pair.

Ce premier sujet a été bien traité par les candidats et l'argument de parité invariante à chaque étape souvent correctement exploité.

Le point de départ était naturellement la parité de la somme de deux entiers selon leur parité respective.

Les principales erreurs rencontrées sont le traitement de seulement quelques cas particuliers pour conclure au cas général et des fautes de calcul. Certains tentent de calculer explicitement les entiers en présence, alors que seule la parité intervient.

Tout comme l'exercice qui suit, la résolution ne nécessitait pas de « calcul » explicite pour prouver le résultat annoncé.

Exercice 2

Dans cet exercice, il s'agissait de voir que la somme obtenue était indépendante du choix des éléments dans les conditions de l'énoncé.

Pour le cas particulier des diagonales, le calcul est élémentaire et on obtient dans les deux cas 4 048 193 260.

Pour traiter le cas général, on peut par exemple procéder de la façon qui suit.

Notons que le terme situé à l'intersection de la première colonne et de la k-ième ligne est 2008(k-1)+1 (suite arithmétique de raison 2008, k-1 variant de 0 à 2007.).

Appelons p (p dépend de k) la différence entre le terme choisi sur cette ligne et 2008(k-1)+1: ce nombre prend chaque valeur entière entre 0 et 2007 une fois et une seule.

En notant n = 2008, la somme cherchée est celle des termes de la forme

n(k-1)+1+p où p et k-1 prennent chaque valeur entière comprise entre O et 2007.

La somme cherchée est donc en notant n=2008 pour simplifier :

$$[1+(n+1)+(2n+1)+\ldots+(n-1)n+1]+[0+1+\ldots+(n-1)]=n(n^2+1)/2.$$

La somme est donc toujours 4048193260.

Cet exercice a été bien traité dans un nombre significatif de copies.

Les connaissances mobilisées étaient modestes (somme des termes d'une suite arithmétique essentiellement), mais il est relativement original pour des élèves de terminale. Il nécessite du recul et un peu d'initiative pour décrire le problème posé.

Le vocabulaire employé ne semble pas toujours clair : la seconde question demande naturellement autre chose que le traitement de quelques cas particuliers…ce qui était d'ailleurs l'objet de la première question!

La démarche proposée ici pour la résolution a été vue par quelques bons binômes et c'est avec plaisir que nous avons lu ces solutions.

Exercice 3

Cet exercice a été de loin perçu comme le moins sympathique par les participants.

Beaucoup ont introduit des inconnues nombreuses et tenté de mettre le problème en équations sans arriver de façon satisfaisante à faire véritablement le lien entre les inconnues introduites.

Appelons a la longueur d'un côté du trapèze isocèle et b celle de sa petite base.

L'angle de la base valant 60°, permet de calculer la hauteur $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

L'aire du trapèze est $\frac{b+(a+b)}{2} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = (2b+a)\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

L'aire d'un triangle équilatéral de côté 1 est $\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Le nombre de dalles nécessaires pour paver le trapèze est obtenu par quotient : il vaut $a(2b+a)$.

On est amené à résoudre l'équation $a(2b+a) = 70280$.

Ici l'exercice se ramène à une question d'arithmétique. a et b désignent des nombres entiers naturels. Cette équation à deux inconnues se résout grâce à la décomposition en produit de facteurs premiers de 70 280.

$70280 = 2^3 \times 5 \times 7 \times 251$

Après avoir remarqué que $2b + a > a$ et que $2b + a$ et a sont de même parité, on résout les différents systèmes possibles.

Les arguments de divisibilité ont été peu mentionnés. Il s'agissait de ne pas perdre de vue que certaines quantités introduites étaient bien des entiers naturels et pas des réels quelconques.

Comme pour le deuxième exercice d'ailleurs, le fait de prendre l'initiative de baptiser un objet (n,p,x,y,…) pour pouvoir ensuite le manipuler aisément ensuite dans des calculs est souvent un obstacle pour la résolution de l'exercice. Quand les notations ne sont pas imposées par un énoncé, il est nécessaire de prendre des notations claires, simples à manipuler et parlantes…

BILAN : pour l'aspect technique lié à chaque exercice, nous renvoyons aux commentaires ci-dessus. Le jury a constaté avec beaucoup de satisfaction que de nombreuses copies réussissent à allier clarté, initiative et idées originales, ce qui est très encourageant pour la suite. Elles figurent naturellement aux premières places de notre palmarès.

Corrigé de l'épreuve du Rallye Mathématique d'Alsace
Première- 2009

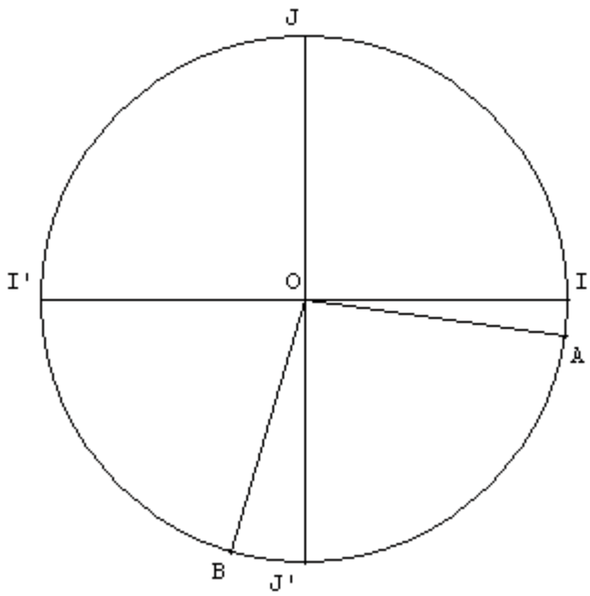
Exercice 1:

On compte le nombre de nombres à 1 , 2 , 3 ,....,10 chiffres tous différents:

à 1 chiffre**:** 10
à 2 chiffres : 9×9 (9 choix pour le chiffre des dizaines – différent de 0 – et 9 choix pour le chiffre des unités – différent de celui des dizaines)
à 3 chiffres: $9\times9\times8$
à 4 chiffres: $9\times9\times8\times7$
....
à 10 chiffres : $9\times9\times8\times.....\times2\times1$

au total: 8877691 nombres avec des chiffres tous différents.

Exercice 2:



Dans cet exercice, les angles seront exprimés en degrés.
Au début de la correction, la petite aiguille est en A et fait un angle α avec [OI), la grande aiguille est en B et fait un angle β avec [OJ ').
donc $\widehat{JOA}=90+\alpha$ et $\widehat{JOB}=180+\alpha$.

Il y a proportionnalité entre les secteurs angulaires parcourus par les deux aiguilles.

Secteur angulaire parcouru par la petite aiguille	30°	α	β	1
Secteur angulaire parcouru par la grande aiguille	360°	$180+\beta$	$90+\alpha$	12

On a le système $\begin{cases} 12\alpha=\beta+180 \\ 12\beta=\alpha+90 \end{cases}$ soit $\begin{cases} 12\alpha-\beta=180 \\ -\alpha+12\beta=90 \end{cases}$.

On cherche la durée de la correction, donc on veut déterminer l'angle θ parcouru par l'aiguille des heures pendant la correction: $\theta=180+\beta-(90+\alpha)=90+\beta-\alpha$.

Par le système, on obtient $\beta-\alpha=\frac{-90}{13}$ et $\theta=90-\frac{90}{13}=\frac{1080}{13}$.

Il reste à faire correspondre une durée à ce secteur angulaire:
En utilisant la proportionnalité:

Secteur angulaire en °	***30°***	$\frac{1080}{13}$
Durée en h	1 *h*	$\frac{36}{13}$

La durée totale de correction est de $\frac{36}{13}$ heures, soit (en arrondissant aux secondes) 2 h 46 min et 9 secondes.

Exercice 3 :

1.

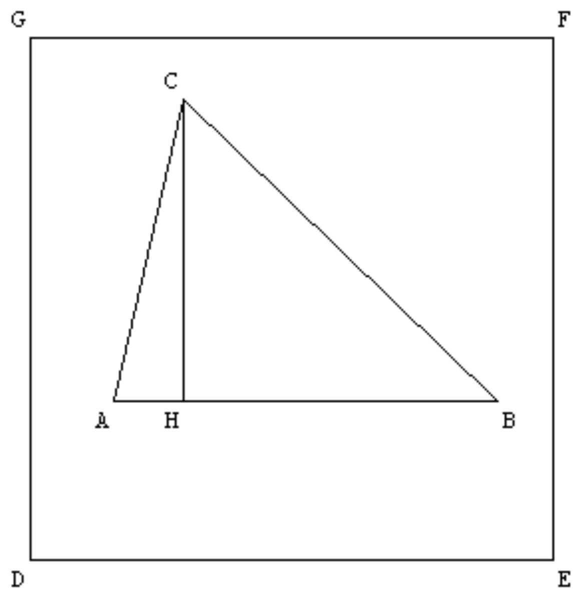
Si un des côtés du triangle ABC (par ex [AB]) est parallèle à un côté du carré:

$AB \leq c$

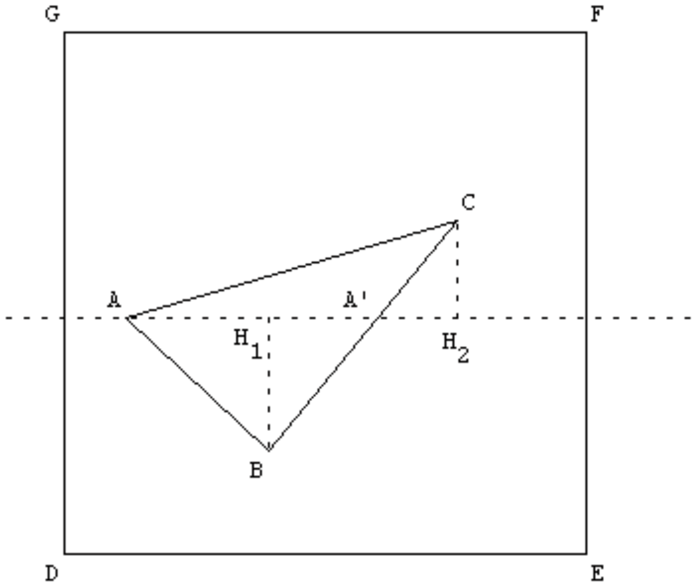
soit [CH] la hauteur issue de C dans le triangle ABC:
. Cette hauteur est aussi parallèle à un côté du carré et $CH \leq c$.

l'aire du triangle est $A(ABC)=\frac{AB \times CH}{2}$

par conséquent $aire(ABC) \leq \frac{c^2}{2}$



Si aucun côté du triangle ABC n'est parallèle à un côté du carré, on détermine la droite d passant par un des sommets (ici A) et parallèle à un des côtés du carré. Cette droite d coupe le côté opposé à A , c'est-à-dire [BC] en un point A '.



$$aire(ABC) = aire(ACA') + aire(ABA')$$

$$aire(ABC) = \frac{BH_1 \times AA'}{2} + \frac{CH_2 \times CA'}{2}$$

$$aire(ABC) = \frac{(BH_1 + CH_2) \times AA'}{2}$$

or $AA' \leq c$ et $BH_1 + CH_2 \leq c$

donc $aire(ABC) \leq \frac{c^2}{2}$

2. Si le carré initial a un côté de 140 m, on peut subdiviser chaque côté en 7 segments de 20 m et on obtient 49 carrés d'aire 400 m².

Il y a en tout 99 piquets , or $99 = 2 \times 49 + 1$.

En répartissant les piquets dans ces carrés, il y aura forcément s un carré contenant 3 piquets (d'après le principe des « tiroirs » de Dirichlet)
D'après la question 1, l'aire du triangle formé par ces 3 piquets sera inférieure à la moitié de l'aire du carré dans lequel il est inscrit

soit $aire \leq \frac{400}{2}$ et $aire \leq 200\ m^2$.

CORRIGE DU RALLYE 2010 DES CLASSES DE PREMIERES

Exercice 1 :

La couleur de $\frac{83}{2010}$ est différente de celle de $\frac{2010}{83}$.

On a $\frac{2010}{83} = \frac{83*24+18}{83} = 24 + \frac{18}{83} = 1+1+\ldots+1+\frac{18}{83}$ donc $\frac{2010}{83}$ est de la même couleur que $\frac{18}{83}$.

La couleur de $\frac{18}{83}$ est différente de celle de $\frac{83}{18}$.

On a $\frac{83}{18} = \frac{4*18+11}{18} = 4 + \frac{11}{18}$ donc $\frac{83}{18}$ est de la même couleur que $\frac{11}{18}$.

On continue ainsi pour finalement trouver que $\frac{83}{2010}$ a la même couleur que $\frac{1}{3}$, et comme 1 est rouge, 3 aussi donc $\frac{1}{3}$ et donc $\frac{83}{2010}$ est bleu.

Exercice 2 :

1. On peut recouvrir le carré de 14 cms de côté par 4 carrés de 7 cms de côté. Si aucun de ces carrés ne contenait (à l'intérieur ou sur ses côtés) plus de 502 points, on n'aurait en tout que 2008 points, ce qui est absurde. Ainsi, au moins l'un de ces carrés contient au moins 503 points.

2. On procède comme à la question en recouvrant le carré avec 100 carrés de côté 1,4cm. Ainsi un de ces carrés contient au moins 21 points, comme ce carré a une diagonale de longueur $1{,}4 \times \sqrt{2} < 2$, ce carré est inscrit dans un cercle de rayon 1cm, on trouve ainsi un disque de rayon 1 cm contenant à l'intérieur ou sur son bord au moins 21 points.

Exercice 3 :

Notons A',B',C' les milieux respectifs des segments [B,C], [A,C], et [A,B].
Soit G le centre de gravité du triangle ABC (intersection des médianes) .
Par hypothèse on a BB'=CC'.
Ainsi BG=$\frac{2}{3}$BB'=$\frac{2}{3}$CC'=CG donc le triangle BGC est un triangle isocèle de sommet principal G et la médiane (GA') est aussi médiatrice de [BC].
(GA') est aussi la médiane du triangle (ABC) relative au côté [BC], ainsi le triangle ABC est isocèle.
De plus, les longueurs des côtés doivent vérifier l'inégalité triangulaire dont les triplets possibles sont (1,7,7), (3,6,6), (4,4,7), (5,5,5).

Rallye Mathématique d'Alsace 2011
Classes de Première

Exercice 1 :

Les gains considérés sont strictement positifs (néanmoins, les candidats qui ont envisagé des gains nuls ou négatifs n'ont pas été pénalisés).

1. La somme totale gagnée après n parties est égale à 39 € (20 + 10 + 9).
   Soient a , b et c les sommes gagnées à chaque partie par le joueur classé respectivement premier, second ou troisième. On a a>b>c.
   a , b et c sont des entiers naturels distincts.

   Le total des sommes gagnées à chaque partie est constant donc $a+b+c=\frac{39}{n}$.
   Ainsi $n\,(a+b+c) = 39$.
   n et $(a+b+c)$ sont des diviseurs positifs de 39.
   Les diviseurs positifs de 39 sont 1 , 3 , 13 et 39.

   Etudions les différents cas possibles:

- $n = 1$; $a + b + c = 39$. Une partie jouée, le premier a gagné 20 € , le second, 10 € et le troisième 9€.
- $n = 13$; $a + b + c = 3$. a, b et c sont des entiers distincts strictement positifs, donc leur somme ne peut pas valoir 3.
- $n = 39$; $a + b + c = 1$. a, b et c sont des entiers naturels distincts donc cette solution est impossible.
- $n = 3$; $a + b + c = 13$.
  On a $a \geq 7$ sinon, $c<b<a\leq 6$ donc le gain maximal en trois parties serait 18 ce qui est contraire à l'hypothèse.
  Par ailleurs, comme les gains finaux sont 9, 10, et 20, a, b et c ne peuvent pas être tous les 3 impairs (car la somme de 3 entiers impairs est impaire).

  Les décompositions possibles de 13 en somme de trois entiers naturels qui respectent ces deux conditions sont:
  $$\begin{array}{c} 1+2+10=13 \\ 1+4+8=13 \\ 2+3+8=13 \\ 2+4+7=13 \end{array}.$$

  Est-il possible dans ce cas que les sommes gagnées soient de 20, 10 et 9 € ?

  Pour obtenir 9 avec la première décomposition, on ne peut pas avoir un gain de 10 mais en 3 parties avec des gains de 1 et 2 on ne peut pas atteindre 9.
  De même avec la troisième décomposition, pour avoir un gain total de 9, il faut gagner 3 parties à 3. Alors en 3 parties avec des gains de 2 et 8 on ne peut pas atteindre le gain total de 10.
  De même il est impossible d'atteindre un gain total de 9 avec la troisième décomposition.

  Finalement dans le cas de 3 parties, la seule décomposition possible est : 1, 4, 8.

Exercice 2:

Les entiers à décomposer sont tous supérieurs à 4.

- Montrons que si un nombre entier a est supérieur à 4, on peut trouver deux nombres entiers de somme égale à a et de produit supérieur à a.
  Ecrivons $a=2+(a-2)$.
  Effectuons le produit $2\times(a-2)=2a-4$.
  Comparons a et $2a-4$: $(2a-4)-a=a-4\geq 0$ car $a\geq 4$.
  Conclusion:
  Tout nombre a supérieur à 4 est égal à la somme de deux nombres , 2 et $a-2$, dont le produit est supérieur à a .

- Si dans une décomposition d'un nombre N apparaît le terme a supérieur à 4 , ce terme a sera remplacé par par les deux nombres $a-2$ et 2 , ce qui ne change pas la somme des termes mais permet d' augmenter le produit cherché.
  Donc dans une décomposition, tout terme supérieur à 4 sera remplacé. On peut donc se restreindre aux décompositions ne comprenant que des termes entiers entre 1 et 3.

- De plus, si 1 est l'un des termes de la décomposition, remplacer 1 et n'importe quel autre terme a par $a + 1$ augmente strictement le produit, donc on peut se restreindre aux décompositions ne comportant que des 2 et des 3.

- Si le terme 2 intervient au moins trois fois, comme $2 + 2 + 2 = 3 + 3$, comme $8 < 9$, remplacer trois 2 par deux 3 augmente le produit. On peut donc se restreindre aux décompositions ne comportant que les entiers 2 et 3 avec au plus deux fois le terme 2.

On en déduit, notant N l'entier à décomposer (seuls les termes 2 et 3 interviennent):

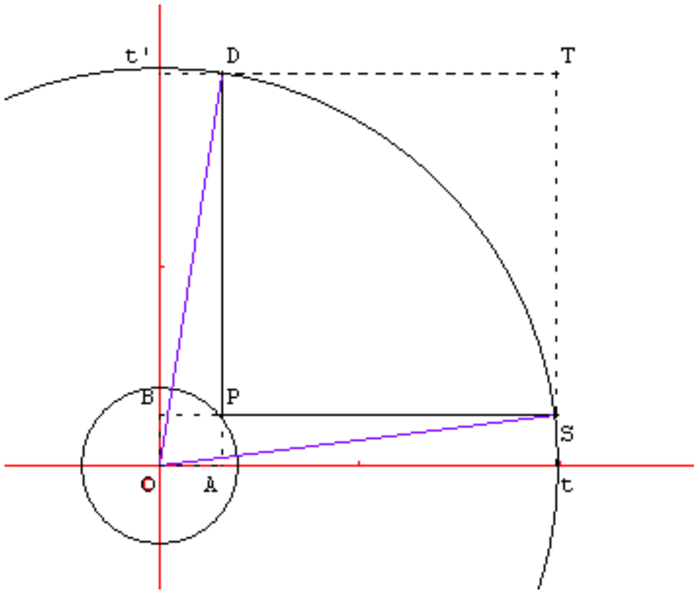
- si $N=3p$, alors le produit maximal est obtenu par la décomposition $N=\underbrace{3+3+....+3}_{p\ \ fois}$
  et vaut 3^p .
- si $N=3p+2$, alors le produit maximal est obtenu par la décomposition $N=2+\underbrace{3+3+....+3}_{p\ \ fois}$
  et vaut 2×3^p .
- si $N=3p+1$, alors le produit maximal est obtenu par la décomposition
  $N=1+\underbrace{3+3+....+3}_{p\ \ fois}=1+3+\underbrace{3+3+....+3}_{p-1\ \ fois}=2+2+\underbrace{3+3+....+3}_{p-1\ \ fois}$ et vaut $4\times 3^{p-1}$.

Les cas proposés dans l'exercice s 'en déduisent:

$17=2+3\times 5$; $2010=3\times 670$ et $2011=1+3\times 670$.
Pour 17, le produit maximal est 2×3^5 , pour 2010 c'est 3^{670} et pour 2011 c'est 4×3^{669} .

Exercice 3 :

Appelons O le centre du cercle, S le sapin, P le peuplier, D le point du bord de la clairière jusqu'où on a marché et T le trésor.



On construit le repère (O,I,J) orthonormé direct de centre O et d'axe des abscisses parallèle à (SP).
Soient A et B les projetés orthogonaux de P sur (OI) et (OJ).
L'énoncé donne $OP = 4$, $OS = OD = 20$.
De plus $SPDT$ est un rectangle donc $SP = DT$ et $PD = ST$.
Adoptons les notations de longueur:
$a = OA$, $b = OB$, $c = PS$ et $d = PD$.

En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles OBS, OAD et OAP, nous obtenons les relations suivantes:

$$OS^2 = OB^2 + BS^2 = b^2 + (a+c)^2 = 20^2 \quad (1)$$

$$OD^2 = OA^2 + AD^2 = a^2 + (b+d)^2 = 20^2 \quad (2)$$

$$OP^2 = OA^2 + OB^2 = a^2 + b^2 = 4^2 = 16 \quad (3).$$

Le calcul de (1) + (2) - (3) donne $(a+c)^2 + (b+d)^2 = 784$.
Or $(a+c)^2 + (b+d)^2 = OT^2$ donc $OT = 28$.

La distance cherchée est donc de 28 mètres.

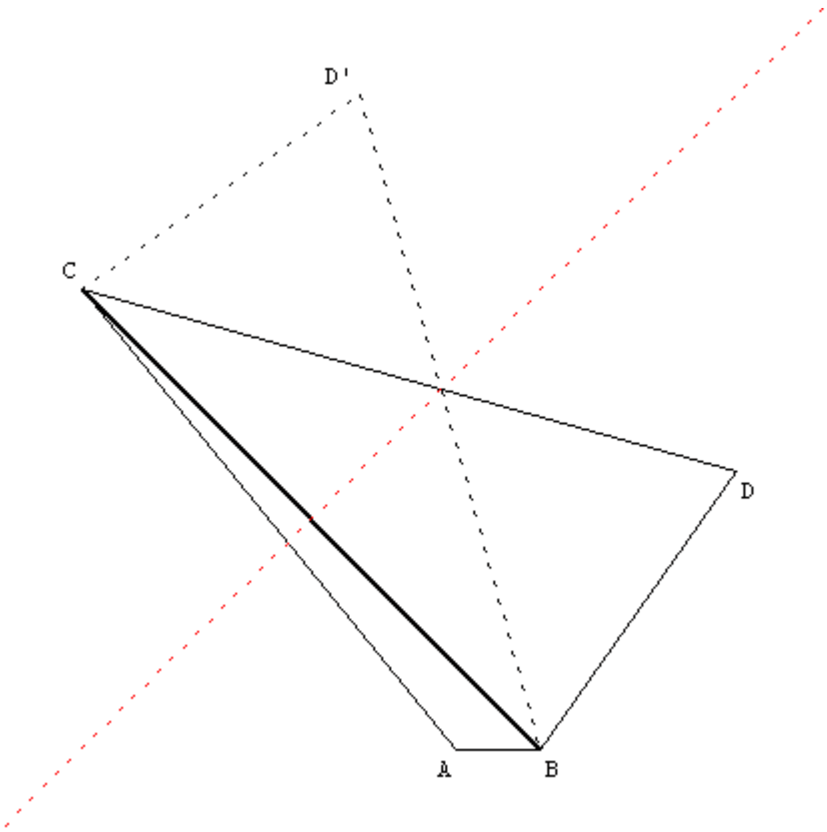
Commentaires et solutions pour le Rallye de Première 2012

Exercice 1

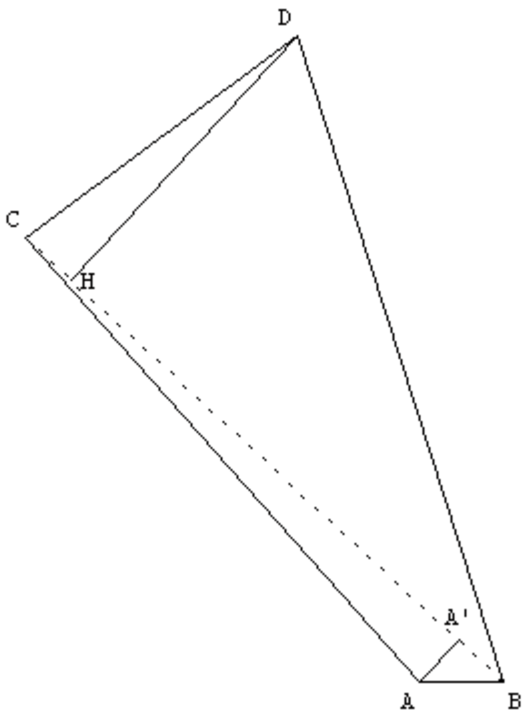
Le quadrilatère peut être considéré comme la juxtaposition de deux triangles ayant comme côté commun une des diagonales du quadrilatère.

En construisant le quadrilatère, il y a deux possibilités : les côtés de longueur respectives 1 et 8 sont adjacents ou ne le sont pas.

S'ils ne le sont pas, il suffit de construire le symétrique (dans la symétrie axiale par rapport à la médiatrice d'une diagonale du quadrilatère) du triangle ayant un côté de longueur 8. La symétrie conservant les aires, nous avons obtenu un quadrilatère de même aire que le précédent et ayant les côtés 1 et 8 consécutifs.



Le problème revient à déterminer l'aire maximale de cette figure :

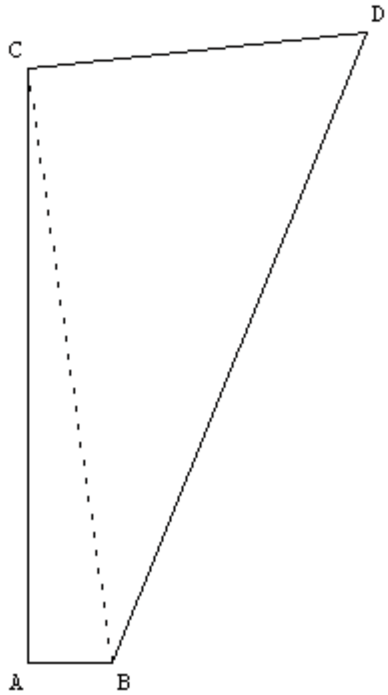


Posons $AB=1$, $AC=8$. $BC=4$ et $BD=7$.
Les autres configurations s'obtiennent toutes par symétrie d'un triangle par rapport à la médiatrice d'une diagonale du quadrilatère.

Soit S_1 l'aire du triangle dont deux côtés mesurent 1 et 8 et S_2 l'aire du triangle dont deux côtés mesurent 4 et 7.
D'après la formule de l'aire S_0 d'un triangle *ABC* en fonction du sinus d'un de ses angles :

$$S_0=\frac{1}{2}\widehat{AB\times AC}\times\sin(BAC) .$$

L'aire du triangle *ABC* est maximale pour $\sin(BAC)=1$ soit BAC angle droit.



Dans ce cas, d'après le théorème de Pythagore, la longueur du côté $[BC]$ est $BC=\sqrt{1^2+8^2}=\sqrt{65}$.
L'aire S_1 vaut $S_1=\frac{1}{2}\times1\times8=4$.

Si $BC=\sqrt{65}$, le triangle *BCD* est rectangle en *D* (réciproque du théorème de Pythagore).
Donc son aire est maximale et égale à $S_2=\frac{1}{2}DC\times DB=\frac{1}{2}\times4\times7=14$.

L'aire S du quadrilatère est $S=S_1+S_2$.

L'aire maximale du quadrilatère est alors égale à : $S=\frac{1}{2}\times1\times8+\frac{1}{2}\times4\times7=18$.

Exercice 2
A chaque étape *n*, le bricoleur construit un nouveau carré et boit une nouvelle gorgée.
Appelons u_n le nombre de carreaux posés au total à l'étape *n* et v_n le nombre de gorgées bues au total à l'étape *n*.

$v_n=n$.

A chaque étape, l'espace carrelé à la forme d'un carré de côté c_n et $c_{n+1}=c_n+2$.
(c_n) est une suite arithmétique de premier terme $c_1=1$ et de raison 2, donc $c_n=1+2(n-1)=2n-1$
.
Ce carré est formé de u_n carreaux, donc $u_n=(2n-1)^2$.

1. S'il a bu 39 gorgées, il a posé u_{39} carreaux, soit $(2\times 39-1)^2=77^2=5929$ carreaux.
2. S'il dispose de 2 012 carreaux, il a bu n gorgées, n étant le plus grand entier naturel tel que $u_n\leq 2012$.
   Soit $(2n-1)^2\leq 2\,012$.
   n étant un entier naturel : $((2n-1)\leq\sqrt{2012})$ soit $n\leq\dfrac{\sqrt{2012}+1}{2}$.
   Le plus grand entier vérifiant cette inéquation est 22.
   Donc le bricoleur a bu 22 gorgées ;

   - Il est possible d'encadrer 2 012 entre deux termes successifs de la suite (u_n) :
     $u_{22}=1\,849$ et $u_{23}=2025$.
     Le bricoleur a donc bu 22 gorgées.

Exercice 3

Soient a le nombre de points attribués pour une victoire et b le nombre de points attribués pour une défaite.
a et b sont des entiers naturels strictement positifs.

Soient x le nombre de victoires de Claudine (et donc de défaites de Christiane) et y le nombre de défaites de Claudine (et donc de victoires de Christiane).
x et y sont des entiers naturels strictement positifs.

L'énoncé se traduit pas le système : $\begin{cases} ax-by=10 \\ ay-bx=3 \end{cases}$.

En additionnant et en retranchant des deux égalités, on obtient : $\begin{cases}(a-b)(x+y)=13 \\ (a+b)(x-y)=7\end{cases}$.

$(a+b)$ est un diviseur positif de 7 et $(a-b)$ est un diviseur positif de 13 car $x+y$ est positif.
$(a+b)$ est donc égal à 1 ou à 7 et $(a-b)$ est égal à 1 ou à 13.

or $(a+b)>(a-b)$ car $b>0$ donc $\begin{cases}a-b=1 \\ a+b=7\end{cases}$ soit $\begin{cases}a=4 \\ b=3\end{cases}$.

A chaque partie, on peut gagner 4 points ou perdre 3 points.