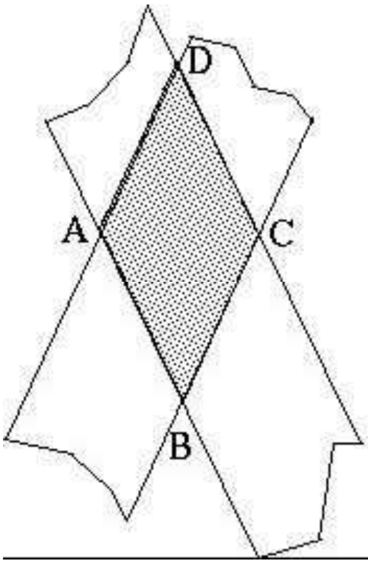
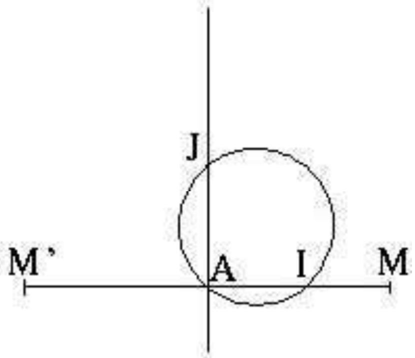
SOLUTIONS 2000

Rallye mathématique de Terminale

SUJET 1

Solution. Un placement de règle permet de tracer deux parallèles dont la distance est la largeur de la règle. Il est donc facile d'utiliser la règle pour tracer des parallèles équidistantes. De plus, l'intersection de deux bandes de même largeur est un losange ABCD, dont on sait que les diagonales AC et BD sont perpendiculaires.





Ces considérations préliminaires conduisent facilement à une solution. Etant donné un point A sur le cercle, on trace une sécante quelconque AI au cercle. On peut déterminer des points M et M' équidistants de A sur cette sécante, en la coupant par des parallèles équidistantes. En plaçant alors la règle dans les deux positions telles que l'un de ses bords passe par M et l'autre par M', on obtient un losange dont MM' est une diagonale. La seconde diagonale de ce losange est donc perpendiculaire à AI ; elle recoupe ainsi le cercle en un point J qui est diamétralement opposé à I. Autrement dit, on a construit un diamètre IJ du cercle. Deux telles constructions de diamètres permettent à Emile de crier victoire au centre du cercle.

Remarque : On ne pouvait pas retenir l'idée de tracer la médiatrice de AI en considérant un losange de diagonale AI, à cause du fait que la règle peut avoir une largeur supérieure au diamètre du cercle.

SUJET 2

Réponse. L'idée est de procéder par récurrence, même si on se "contente" d'aller jusqu'à 2000 et non pas jusqu'à l'infini. On peut commencer par 2, qui a un chiffre et est divisible par $2^1 = 2$, ou par 12, qui a deux chiffres et est divisible par $2^2=4$.

Solution. Supposons (hypothèse de récurrence) que l'on connaisse un nombre A de n chiffres, qui soit divisible par 2^n et dont tout chiffre soit égal soit à 1 soit à 2. Si le nombre A est un multiple pair de 2^n, c'est à dire si $A = 2p \times 2^n$, on obtiendra un multiple de $2^{(n+1)}$ ayant (n+1) chiffres en prenant $A + 2 \times 10^n$. En effet,

$$2 \times 10^n + A = 2^{(n+1)} \times 5^n + p \times 2^{(n+1)} \times 5^n = 2^{(n+1)} \times 5^n \times (1 + p).$$

Si A est un multiple impair de 2^n, c'est à dire si $A = (2p+1) \times 2^n$, on considérera $A + 10^n$, ce qui revient à placer un 1 devant l'écriture chiffrée de A. En effet

$10^n + A = 2^n \times 5^n + (2p+1) \times 2^n = (5^n + 2p + 1) \times 2^n$.
Or 5^n est un nombre impair, donc $(5^n + 2p + 1)$ est un nombre pair. Ainsi, il est possible d'extraire de la parenthèse un facteur 2, qui se combinera avec 2^n pour aboutir à $2^{(n+1)}$.

SUJET 3

Solution. A partir d'un entier donné, effectuons des divisions successives par 2 tant que c'est possible, c'est à dire tant que l'on est en présence d'un nombre pair. Ainsi, si le nombre de départ est impair, on ne fait rien. Au contraire, s'il est pair, on le divise par 2 ; si le résultat est encore un nombre pair, on recommence, sinon on s'arrête. De la sorte, on écrit tout entier comme produit d'une puissance de 2 par un nombre impair (qui peut être réduit à 1).
Dire alors que deux entiers ont un quotient qui est une puissance de 2, c'est dire que dans l'écriture considérée, le nombre impair est le même pour les deux entiers. Or, entre 1 et 2n, on dispose de n nombres impairs (à savoir 1, 3, ... , 2n-1). Donc, si on choisit (n+1) entiers entre 1 et 2n, on est obligé d'en choisir au moins deux qui sont produits d'un même nombre impair par des puissances de 2.

Solutions du Rallye Mathématique d'Alsace 2001 - Classes de Terminale

Réponses.

Sujet 1. Parmi les entiers de 1 à 2001, on obtient les 1201 entiers dont l'écriture décimale se termine par l'un des chiffres 0, 1, 2, 4, 5 ou 6.

Sujet 2. Dans les conditions indiquées par l'énoncé, 4 minutes sont nécessaires.

Sujet 3. La longueur AC + CB est égale à 462 cm.

Solutions.

Sujet 1. Posons f(x) = E(2x) + E(4x) + E(6x) + E(8x). Une périodicité s'observe sans difficulté, à savoir : f(x + 1/2) = f(x) + 10. Il suffit alors de connaître les entiers que l'on obtient lorsque x est choisi dans l'intervalle [0, 1/2], puis de décaler de 10 en 10 ces entiers.

La fonction E(x) a un saut au passage de chaque entier, donc E(2x) a un saut aux passages de demis et de même pour les autres termes de f(x). En réduisant au même dénominateur les fractions pour lesquelles se produisent des sauts, on est amené à envisager celles de dénominateur 24. On obtient : f(0) = 0, f(3/24) = f(1/8) = 1, f(5/24) = 2, f(6/24) = f(1/4) =4, f(8/24) = f(1/3) = 5, f(11/24) = 6, f(12/24) = f(1/2) = 10.

Les résultats ci-dessus permettent d'affirmer que les valeurs atteintes par f sont toutes les valeurs entières dont l'écriture décimale ne se termine ni par 3, ni par 7, par 8 ou par 9. Cela fait 6 nombres par dizaine (pour la première dizaine, 0 est à exclure, mais cela est compensé par la présence de 2000), donc 1200 nombres de 1 à 2000, auxquels il convient d'adjoindre 2001.

Sujet 2. Désignons par e l'épaisseur de la bande magnétique. La surface visible de bande enroulée a une aire A qui peut être calculée de deux façons : soit A = e*l, où l est la longueur de bande enroulée, soit A = pi*r^2 , où r est le rayon de bobine obtenu pour cette longueur enroulée. Il en résulte l = pi*r^2/e. Lorsque toute la bande est enroulée, on obtient L = pi*R^2/e. Ainsi, pour l = L/4, il vient l = pi*$(R/2)^2$/e, d'où r = R/2. Autrement dit, le quart de la longueur donne lieu au rayon moitié.

Et la rotation uniforme que cite l'énoncé, où en est il question dans ce qui précède ? Nulle part, mais il suffit maintenant d'observer que le rayon de bobine obtenu lors de l'enroulement augmente à chaque tour de l'épaisseur e. Ainsi le rayon de la bobine sera une fonction linéaire du temps : un rayon moitié est atteint à l'issue d'un temps moitié. Il faut donc donner raison à Claire.

Mais alors, le légendaire Emile se serait-il pour une fois hasardé à tenir des propos infondés ? Ce serait mal le connaître : il avait été surpris un chronomètre à la main en train d'observer le défilement de bandes de cassettes. S'il a dit environ 3 minutes, il convient de lui faire ce crédit et c'est donc que le modèle consistant à négliger le rayon r_0 de l'axe des bobines ne doit pas être tout à fait correct. Si vous souhaitez approfondir la réflexion, cherchez une valeur du rapport R/r_0 qui soit compatible avec l'évaluation d'Emile.

Sujet 3. Considérons un repère dont l'axe des x soit porté par CB et l'axe des y par CA. En posant selon l'usage fréquent CB = a et CA = b, on obtient pour équation de la droite (AB) :

$$bx + ay = ab.$$

Puisque la racine carrée de 441 est 21, la droite (AB) passe par le point D de coordonnées (21 ; 21). On en déduit qu'une condition qui lie a et b est 21(a + b) = ab.

Désignons par rac(x) la racine carrée d'un nombre positif x. Considérons l'homothétie de centre C et de rapport k = rac[440/(a^2 + b^2)]. Elle transforme AB en un segment A'B' de longueur rac(440).

Le carré C2 aura bien le segment A'B' comme un de ses côtés si la distance du point B' à la droite AB est égale à rac(440).

L'équation de (AB) s'écrivant bx + ay - ab = 0, la distance à (AB) d'un point quelconque M de coordonnées (x, y) est d(M, AB) = |bx + ay - ab|/rac(a^2 + b^2). En particulier, pour B de coordonnées (ka, 0), on obtient d(B', AB) = |kab - ab|/rac(a^2 + b^2) = ab(1 - k)/rac(a^2 + b^2). En reportant la valeur de k, il vient d(B', AB) = ab[rac(a^2 + b^2) - rac(440)]/(a^2 + b^2).

Introduisons la variable u = a + b, qui conduit à écrire ab = 21(a +b) = 21u et a^2 + b^2 = $(a + b)^2$ - 2ab = u^2 - 42u. L'équation d(B', AB) = rac(440) s'écrit alors :

$$21u[rac(u^2 - 42u) - rac(440)]/(u^2 - 42u) = rac(440)$$

d'où en simplifiant : 21[rac(u^2 - 42u) - rac(440)] = rac(440) (u - 42).

On en déduit : 21rac(u^2 - 42u) = rac(440) (u - 21) d'où, en élevant au carré :

$$u^2 - 42u - 440*441 = 0,$$

dont le discriminant réduit est 441^2. L'équation s'écrit donc : (u + 420)(u - 462) = 0. Seule la solution positive u = 462 convient.

A partir de la somme S = a + b = 462 et du produit P = ab = 21*462, l'équation X^2 - SX + P = 0 fournit les valeurs de a et b, qui, tous calculs faits, sont : 21(11 + rac(99)) et 21(11 -rac(99)). Des valeurs approchées sont 439,95 et 22,05. L'écart de tailles fait que la représentation géométrique précise de la situation serait peu lisible !

Rallye mathématique d'Alsace 2002

Classe de Terminale

Solution des exercices pour la classe de Terminale

Ces solutions sont-elles les meilleures ?

Exercice 1

Traçons une famille de a parallèles à AB équidistantes, la première étant située à la distance $1/2a$ de AB. La distance des parallèles entre elles est alors égale à $1/a$ et la dernière est à la distance $1/2a$ de CD. De la sorte, la distance d'une statue au chemin qui lui est le plus proche est au plus égale à $1/2a$. Traçant alors depuis chaque statue un chemin qui suit ce parcours le plus court, nous obtiendrons un réseau dont la longueur totale sera au plus égale à :

$$a + 288/2a = a + 144/a,$$

puisque la longueur en km de chacun des a premiers chemins est égale à 1.

Nous souhaitons établir qu'en choisissant convenablement la valeur de a, nous pouvons ne pas dépasser une longueur totale de 24 km, ce qui signifie réaliser l'inégalité :

$$a + 144/a \leq 24,$$

$$\text{ou : } a^2 - 24a + 144 \leq 0.$$

Or $a^2 - 24a + 144 = (a - 12)^2$. Donc la seule possibilité d'obtenir une valeur négative ou nulle s'obtient en prenant $a = 12$.

Vérification: On trace 12 chemins principaux, régulièrement espacés, auxquels les statues sont reliées chacune par un chemin de liaison allant droit au chemin principal le plus proche. La longueur, exprimée en km, de ces chemins de liaison est ainsi au plus égale à 1/24. Le réseau construit de la sorte a au total une longueur en km majorée par 12 + 288/24 = 12 + 12 = 24.

Prolongements de cet exercice : Le principe de tracé pour le réseau, par des parallèles équidistantes, permet de répondre à la question posée ; en revanche, des emplacements des statues étant supposés donnés, ce principe ne serait guère satisfaisant pour atteindre la longueur totale la plus courte possible. Cette question peut être étudiée en prolongement de l'exercice. Il est facile de simuler des emplacements aléatoires pour les statues, en utilisant par exemple les ressources du site Mathematikos de Jean-Paul Quelen. Ayant ainsi placé 288 points, on peut avoir l'idée de considérer des segments mobiles parallèles à AB et de travailler sur la considération d'effectifs. Par exemple, pour le premier segment, on peut le faire progressivement monter jusqu'à ce qu'il passe par l'un des points et en laisse un certain nombre, disons 12 pour fixer les idées, en dessous de lui. Puis on trace alors un second segment, en le faisant monter depuis le niveau atteint par le premier, jusqu'à ce qu'il passe par l'un des points et en laisse 24 (le double de l'effectif précédemment fixé) entre le premier segment et lui. Et ainsi de suite pour obtenir les chemins principaux, parallèles à AB. Ensuite, on achève le réseau comme précédemment par la liaison de chaque statue avec le chemin principal le plus proche. Il serait intéressant d'avoir une idée de la longueur que l'on peut ainsi espérer atteindre pour ce réseau ; c'est certainement nettement moins de 24 km. Autre étude possible : Quelle disposition des emplacements de statues nécessite-t-elle le plus long réseau ?

Exercice 2

Projetons orthogonalement M en H_1 sur A_1A_2, H_2 sur A_2A_3, H_3 sur A_3A_4, H_4 sur A_4A_1.
L'inégalité $MH_1 > MH_2$ équivaut à $a_2 > b_2$.

De même $MH_2 > MH_3$ équivaut à $a_3 > b_3$, $MH_3 > MH_4$ équivaut à $a_4 > b_4$ et $MH_4 > MH_1$ équivaut à $a_1 > b_1$.

Par transitivité de la relation d'ordre, trois des inégalités précédentes entre les MH_i (i = 1,4) excluent la quatrième.

Exercice 3

De l'identité $0 + 1 + ... + (n - 1) + n = n(n + 1)/2$, n entier, $n > 0$, on déduit pour p entier quelconque :

$$p + (p + 1) + ... + (p + n - 1) + (p + n) = (n + 1)(n + 2p)/2.$$

Soit N un entier. Ecrire N comme somme d'entiers consécutifs, en nombre au moins égal à deux, revient ainsi à trouver $n > 0$ et p tels que :

$$2N = (n + 1)(n + 2p).$$

Les deux facteurs qui apparaissent au second membre sont de parités différentes. La question devient d'écrire 2N comme produit d'un nombre pair et d'un nombre impair plus grand que 1.

Cela sera possible, en mettant dans N autant de fois que possible 2 en facteur, si et seulement s'il subsiste alors un facteur impair plus grand que 1. Par exemple, si $N = 20$, on écrira $2N = 5 \times 8$ et on pourra ainsi prendre $n = 4$ et $p = 2$ (vérification : $20 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6$).

Tous les entiers supérieurs à 1 sauf les puissances de 2 sont dans ce cas. Mais si N est une puissance de 2, comme 2 lui-même, puis 4, 8, 16 et ainsi de suite, il n'est pas possible de l'exprimer comme somme d'entiers consécutifs.

RALLYE MATHÉMATIQUE D'ALSACE 2003

Énoncés de la 30e édition

Classes de Terminale

RÉPONSES ET SOLUTIONS

RÉPONSE A L'EXERCICE 1

En privant un échiquier habituel 8 x 8 d'une case de son bord, on ne peut pas recouvrir la surface restante par des triminos recouvrant chacun trois cases alignées. Mais si on supprime une case séparée de deux bords par 2 cases, un tel recouvrement est possible.

Voir la solution

RÉPONSE A L'EXERCICE 2

Dans cet exercice du trentenaire, il faut faire disparaître au moins trois signes "+" pour atteindre 3030. Par exemple

1 + 23 + 4 + 5 + 6 +7 + 89 +10 + 11 + ... + 24 + 2526 + 27 + 28 + 29 + 30 = 3030.

Voir la solution

RÉPONSE A L'EXERCICE 3

En tournant autour de la table, affectons à chacun des membres de l'association un numéro, en commençant par 0, qui sera attribué au président, et en allant jusqu'à 99. Pour que les conditions énoncées soient satisfaites, il faut et il suffit que chaque membre de numéro pair (dont le président) gagne 60 euros et chaque membre de numéro impair perde 40 euros.

Voir la solution

SOLUTION DE L'EXERCICE 1 (d'après un message de notre correspondant Pierre Renfer)

Au lieu du coloriage habituel de l'échiquier en noir et blanc, procédons à un coloriage tricolore de la manière représentée sur la figure : Depuis la case inférieure gauche (la case A1 selon la désignation usuelle aux échecs) affectée de la couleur notée **a**, les couleurs se succèdent horizontalement dans l'ordre **a**, **b**et **c** et verticalement dans l'ordre **a**, **c** et **b**, Ainsi, un trimino placé sur l'échiquier recouvre toujours les trois couleurs.

Nous remarquons que la couleur **a** apparaît sur 22 cases, soit une de plus que les deux autres couleurs, qui apparaissent chacune sur 21 cases. Ce ne peut donc être qu'en supprimant une case de cette couleur que l'on peut espérer qu'un recouvrement par les triminos soit possible.

c	a	b	c	a	b	c	a
a	b	c	a	b	c	a	b
b	c	$\underline{a}$	b	c	$\underline{a}$	b	c
c	a	b	c	a	b	c	a
a	b	c	a	b	c	a	b
b	c	$\underline{a}$	b	c	$\underline{a}$	b	c
c	a	b	c	a	b	c	a
a	b	c	a	b	c	a	b

Mais si un tel recouvrement est réalisé, on peut le faire pivoter d'un quart de tour pour obtenir un nouveau recouvrement de l'échiquier privé d'une case, laquelle aura elle aussi pivoté d'un quart de tour. Et ce n'est possible que si cette case est aussi de la couleur **a**. Il nous faut donc chercher sur l'échiquier s'il y a une case de couleur **a** qui reste de couleur **a** quand on fait pivoter l'échiquier d'un quart de tour.

Cela revient à rechercher si l'on peut trouver sur l'échiquier quatre cases de la couleur **a** disposées en carré. C'est bien le cas : sur la figure du haut, les couleurs dans ces cases sont désignées par des lettres soulignées.
Et la figure ci-contre indique un recouvrement de l'échiquier privé d'une telle case (celle qui est noircie) : on a représenté six triminos placés verticalement, tous les autres pouvant être placés horizontalement.

			5	**6**			
			5	**6**			
			5	**6**			
			3	**4**			
			3	**4**			
1	**2**		**3**	**4**			
1	**2**						
1	**2**						

COMPLEMENT. En ligne avait été d'abord indiquée la solution ci-après, convenant pour un échiquier privé d'une case de bord (un cas qui est souvent considéré dans de tels problèmes consiste à retirer de l'échiquier une case de coin), mais susceptible d'être en défaut pour la suppression d'une case intérieure. Nous avons choisi de la laisser en ligne en précisant l'argument (*) qui peut être discuté. D'une part il est toujours intéressant de procéder à l'examen critique d'un raisonnement, d'autre part l'extension qui est proposée pour un nombre arbitraire de cases mérite d'être conservée.

Considérons la couverture par des triminos d'un carrelage ayant huit colonnes, mais dont le nombre de rangées peut être illimité. Chaque trimino peut être placé soit horizontalement, auquel cas il apparaît dans trois colonnes successives, soit verticalement. Fixons notre attention sur les triminos verticaux. Il y en a au moins 2 qui apparaissent dans la rangée 1 et qui vont alors jusqu'à la rangée 3. D'autres triminos verticaux peuvent intervenir dans la couverture des rangées 2 et 3 ; il est important de noter que si c'est le cas, leur nombre est un multiple de trois *.

...								
9								
8								
7								
6								
5								
4								
3								
2								
1								

(*) *Cet argument est valable sous l'hypothèse que l'on recouvre complètement les rangées considérées. Dans le cas du recouvrement qui a été indiqué pour l'échiquier privé d'une case sur la rangée 3, cette hypothèse n'est pas vérifiée.*

Ainsi, il y aura de nouveau au moins 2 triminos verticaux qui apparaîtront dans la rangée 4 et iront jusqu'à la rangée 6. Et de même au moins 2 triminos verticaux allant de la rangée 7 à la rangée 9. Ôter une case *de la rangée 8* ne permettra donc pas le recouvrement souhaité. Par conséquent, ôter une case *du bord* d'un échiquier 8 x 8 ne conduit pas à une surface recouvrable par les triminos considérés.

Remarque et généralisation : *Le même problème pour un échiquier 7 x 7 peut aboutir à une possibilité de le recouvrir. En effet, des triminos verticaux apparaissant aux rangées 1, 4 et 7 seraient dans ce cas en nombre au moins égal à 1. Ôter une case à la rangée 7 fait alors disparaître l'objection à un recouvrement. Et il est facile de préciser une façon d'obtenir ce recouvrement si la case ôtée est une case de coin : on place des triminos verticaux sur la colonne qui est privée de la case de coin et des triminos horizontaux partout ailleurs.*

D'une manière générale, un échiquier n x n privé d'une case de coin peut être recouvert par des triminos horizontaux et verticaux si et seulement si n est de la forme n = 3p + 1, c'est à dire si n est égal à 4 ou 7 ou 10 etc.

Revenir aux énoncés.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2

Remarquons tout d'abord qu'en vertu d'une formule qu'aucun candidat au rallye n'ignore,

$$1 + 2 + 3 + ... + 28 + 29 + 30 = 30 \times 31/2 = 465.$$

Dans la somme

$$S = 1 + 2 + 3 + ... + 28 + 29 + 30,$$

faire disparaître un signe "+" situé devant un nombre à 1 chiffre (ainsi remplacer 8 + 9 par 89) revient à multiplier par 10 la valeur du nombre précédent, et faire disparaître un signe "+" situé devant un nombre à 2 chiffres (par exemple, remplacer 9

+ 10 par 910) revient à multiplier par 100 la valeur du nombre précédent. Notons a l'entier qui précède le signe "+" que l'on fait disparaître. On change S en S' = S + 9a dans le premier cas et en S' = S + 99a dans le second.

Il est clair que S + 9a, avec $a < 9$, est plus petit que la valeur demandée 3030, donc ne peut pas convenir. Considérons alors la possibilité que S + 99a = 3030, d'où 99a = 3030 - 465 et donc 99a = 2565. Comme 2565 est divisible par 9 mais n'est pas divisible par 11, il n'y a pas de solution.

Essayons alors de faire disparaître deux signes "+" dans S. Si ces deux signes ne sont pas voisins, on est ramené à deux études du même type que précédemment et nous allons y revenir. Auparavant, on peut exclure la disparition de deux signes "+" voisins, car alors le résultat atteint serait ou bien nettement trop petit, comme c'est le cas si l'on remplace 7 + 8 + 9 par 789, ou nettement trop grand, comme c'est le cas si l'on remplace 8 + 9 + 10 par 8910. Pour deux signes "+" non voisins, il suffit de considérer

$$S + 9a + 99b, \text{ avec } a < 9 \text{ et } b > 8.$$

En effet, pour S + 9a + 9b, avec a et b inférieurs à 9, la valeur atteinte serait trop petite et pour S + 99a+ 99b, avec a et b au moins égaux à 9, on retomberait sur l'objection précédente de non-divisibilité par 11.

L'égalité

$$S + 9a + 99b = 3030$$

revient à 9a + 99b = 2565. Or la division euclidienne de 2565 par 99 s'écrit

$$2565 = 25 \times 99 + 90.$$

Même si l'on prend la plus grande valeur possible pour b, soit b = 25, la valeur qu'il faudrait affecter à a serait égale à 10, qui dépasse la plus grande valeur autorisée, à savoir 8.

Reste à considérer la disparition de 3 signes "+". L'étude précédente fournit une réponse, en remplaçant simplement a par $a_1 + a_2$, avec a_1 et a_2 inférieurs à 9 et $a_1 + a_2 = 10$. Et cette fois-ci, on aboutit à des solutions acceptables. Celle qui a été proposée dans la réponse en est une.

Prolongement possible : *Les curieux se demanderont si l'on peut atteindre 3030 en supprimant plus de 3 signes"+"dans S...*

Revenir aux énoncés.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3

D'humeur généreuse, les 100 membres de l'association décident de placer chacun 10 euros sur la table pour les utiliser au bénéfice de l'association. Ainsi les 1000 euros gagnés au casino se retrouvent-ils mis dans un circuit honorable et l'énoncé gagne pour sa part en simplicité. Les conditions de ce nouvel énoncé sont en effet :

- Gain du président égal à 50 euros.
- Bilan global nul (ce que les uns ont donné, les autres l'ont reçu).
- Pour tout ensemble constitué de six voisins de table, bilan négatif ou nul.

En fait, le bilan ne peut être que 0 pour tout ensemble de six voisins de table, car si un bilan était strictement négatif pour un groupe donné de six voisins de table, les conditions énoncées empêcheraient de le compenser pour aboutir à un bilan global nul**. On peut ensuite considérer la réunion de 16 groupes successifs de 6 voisins, tous à bilan nul, qui laisse échapper un ensemble de 4 voisins ; le bilan d'ensemble étant nul, il en est donc de même pour celui de ces quatre voisins. Leur complémentaire dans un ensemble de 6 est constitué de deux voisins, pour lesquels on obtient encore un bilan nul. Ainsi toutes les paires de voisins donnent-elles lieu à un bilan nul : ce que l'un a reçu a été donné par l'autre. Le président ayant reçu 50 euros, il en sera donc de même pour tous les membres de numéro pair, alors que chacun des membres de numéro impair aura au contraire donné 50 euros. En ajoutant 10 euros à chacune de ces sommes pour revenir à l'énoncé initial, on obtient la réponse qui a été indiquée.

Revenir aux énoncés.

(**) Dans un aimable message électronique, une correspondante, Fabienne K., exprime le souhait que nous développions cet argument. *Car,* nous écrit-elle, *si l'on considère des ensembles disjoints de 6 voisins, ils reste pour arriver à 100 un ensemble de 4 voisins. Pourquoi faut-il écarter la possibilité qu'un bilan positif pour ces 4 voisins équilibre le bilan strictement négatif envisagé ?* Vous avez raison Fabienne, ce point doit être précisé. Pour ce faire, considérons un recouvrement de l'ensemble des 100 membres par des ensembles disjoints, chacun constitué de 4 voisins, l'un de ces ensembles étant précisément celui dont le bilan est supposé strictement positif. Pour annuler ce bilan strictement positif, l'un au moins des autres ensembles de 4 voisins doit, lui, donner lieu à un bilan strictement négatif. Et c'est là qu'il apparaît une impossibilité, puisque le complémentaire de ces 4 voisins, constitué de 96 membres, se partitionne en seize ensembles disjoints de 6 voisins, donnant lieu chacun par hypothèse à un bilan négatif ou nul.

CORRIGE DU RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE 2004

Sujets de Terminale

Sujet 1

<u>Le triangle millésimé</u>

On forme un tableau triangulaire d'entiers de la manière suivante :

0	1	2	3	….	…..	…..	2001		2002		2003		2004
	1	3	5	7	…..	…..	…..	4003		4005		4007	
		4	8	12	….	…..	…..	…..	…..	8008		8012	
			12	20	….	…..	…..	…..	…..	…..	16020		
				… ….	…. …..	…..	……..	…….	…….				

Chaque entier du tableau est la somme des deux entiers de la ligne précédente qui "l'encadrent".

Montrer que les entiers situés au sommet de ce triangle sont tous les trois divisibles par 2004.

Corrigé .

Par récurrence, on démontre les deux résultats suivants :

- La ligne de numéro n est une progression arithmétique de raison 2^{n-1}.
- Le premier terme de la ligne numéro n est égal à $(n-1)2^{n-2}$.

En effet la somme des deux termes de rang k et (k+1) d'une progression arithmétique de premier terme a et de raison r, soit a + kr et a + (k+1)r, est égale à 2a + r + k2r (publicité gratuite pour une marque de détachant). On obtient de la sorte le terme de rang k d'une progression de premier terme 2a + r et de raison 2r. La première ligne étant la suite des entiers naturels, progression arithmétique de premier terme 0 et de raison 1, les résultats énoncés s'en déduisent facilement.

Le premier terme de la ligne de numéro 2005 (attention au coup des arbres et des intervalles !) est par conséquent 2004´2^{2003}. C'est bien un multiple de 2004.

Sujet 2

<u>L'aire minimale</u>

Deux demi-droites du plan sont perpendiculaires et de même origine O.
On considère un point M dans le quart de plan qu'elles définissent et une droite D passant par M. La droite D coupe les demi-droites en deux points A et B.
Comment choisir la droite D pour que l'aire du triangle OAB soit minimale ?

Corrigé

Nous allons donner deux solutions possibles : l'une analytique (et trouvée dans la majorité des copies) et l'autre géométrique.

<u>Solution analytique</u> :

On définit un repère orthonormé $\left(O;\frac{1}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|}\overrightarrow{OA},\frac{1}{\left\|\overrightarrow{OB}\right\|}\overrightarrow{OB}\right)$ d'origine le point O, origine commune des deux demi-droites perpendiculaires.

Le point M de coordonnées $(a;b)$ est donné , soient $A(p;0)$ et $B(0;q)$. On suppose A et B distincts, donc p et q non nuls.

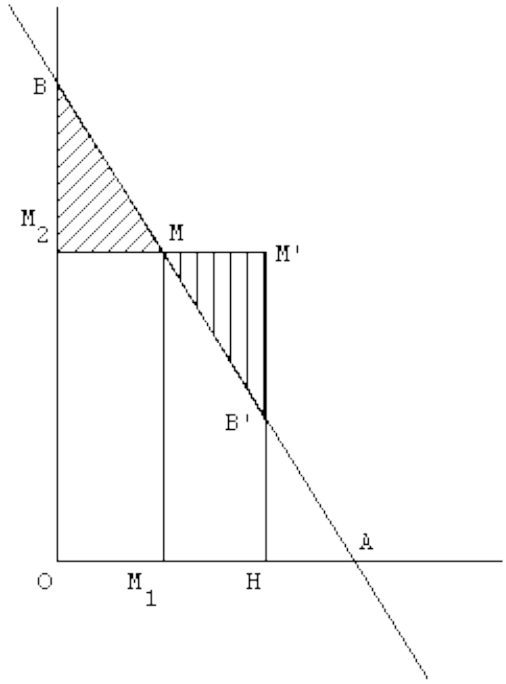
® La droite (AB) passant par M , on détermine q en fonction de p : $q = \dfrac{bp}{p-a}$.

® On en déduit l'aire du triangle OAB rectangle en O en fonction de p , soit $f(p)$:

$$f(p) = \frac{bp^2}{2(p-a)}$$

® En étudiant les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$, on en déduit la valeur p_0 de p qui minimise la fonction f. On trouve $p_0 = 2a$. (puis $q = 2b$) .

Solution géométrique :



On définit les points suivants :

® M_1 et M_2 sont les projetés orthogonaux du point M respectivement sur [OA) et sur [OB).

® B' et M' sont les symétriques respectifs de B et M_2 par rapport au point M .

® H est le projeté orthogonal de M' sur [OA).

Les triangles MM_2B et $MM'B'$ sont isométriques, ils ont donc la même aire.

Le rectangle $OM_2M'H$ a alors la même aire que le trapèze $OBB'H$.

$$\begin{aligned} aire\,(OAB) &= aire\,(OBB'H) + aire\,(B'HA) \\ &= aire\,(OM_2M'H) + aire\,(B'HA) \\ &= \underbrace{2\times OM_1\times OM_2}_{indépendant\ de\ la\ droite\,(AB)} + aire\,(B'HA) \end{aligned}$$

L'aire du triangle OAB sera minimale lorsque l'aire du triangle $B'HA$ sera nulle, pour cela il faut placer le point A en H.

Sujet 3

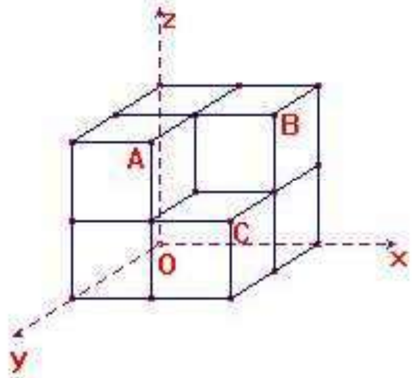
La sphère et les cubes

Au moyen de 216 petits cubes de 1 cm de côté, on construit un grand cube de 6 cm de côté. On note O son centre.

Combien la sphère de centre O et de diamètre 6 cm contient-elle de petits cubes entiers ?

Corrigé

La sphère de centre O et de rayon 3 est le lieu des points dont la distance à O est égale à 3. Considérons un repère orthonormé de centre O, d'axes parallèles aux arêtes des cubes. On peut restreindre la recherche des cubes entièrement intérieurs à cette sphère à l'octant des points de coordonnées x, y et z toutes positives. Or dans cet octant, trois sommets A, B, C de cubes ont deux coordonnées égales à 2 et une égale à 1. Comme $2^2 + 2^2 + 1^2 = 9 = 3^2$, ces trois sommets sont à une distance de O exactement égale à 3. La figure fait ainsi apparaître 7 cubes intérieurs à la sphère dans l'octant considéré. En multipliant par 8, on obtient le nombre total de cubes intérieurs à la sphère, à savoir 56.



Correction du Rallye Terminale 2005

Corrigé de l'Exercice 1

Les convives et leurs places.
On peut commencer par étudier les petites valeurs de n, disons de 1 à 6 et essayer de réaliser la situation proposée. On constate aisément qu'elle est impossible.
Numérotons de 1 à n les places prises successivement , le sens de rotation étant arbitrairement choisi. Nommons xi le convive initialement assis à la place i.
Après le mouvement, on peut supposer que x1 reste assis à la place 1 (rotation de l'ensemble).
On peut également supposer que x2 a pris la place 4 (symétrie de l'ensemble).
L'étude du cas n=15 montre en plaçant les convives successivement comme indiqué que x6 se retrouve à la même place que x1, ce qui est exclu.
Le cas n=16 puis d'ailleurs n=17 montre la possibilité de réaliser la situation proposée en plaçant les convives successivement comme indiqué.
Le cas n=3k (multiple de 3) donne une impossibilité comme le cas n=15 : x1 et xk+1 se retrouvent à la même place.
Regardons le cas n=3k+1, dont relève le cas n=16.
Pour i de p+1, xi prend la place 1+3(i-1). C'est le premier « tour ».
Le convive xi avec i=p+1 est à la place 3p+1, à côté de x1.
Pour i de p+2 à 2p+1, xi prend la place 3(i-p+1). C'est le deuxième « tour ».
Le convive xi avec i=2p+1 est à la place 3p, à côté de xi avec i=p+1.
Pour i de 2p+2 à 3p+1, xi prend la place 2+3(i-2p-2). C'est le troisième « tour ».
Le convive xi avec i=3p+1 se retrouve à la place 3p-1, à côté de xi avec i=2p+1.
La situation peut dons se réaliser dans ce cas.
Le cas n=3k+2 est analogue.

Bilan : on peut réaliser cette amusante situation pour n supérieur ou égal à 7 et non multiple de 3.

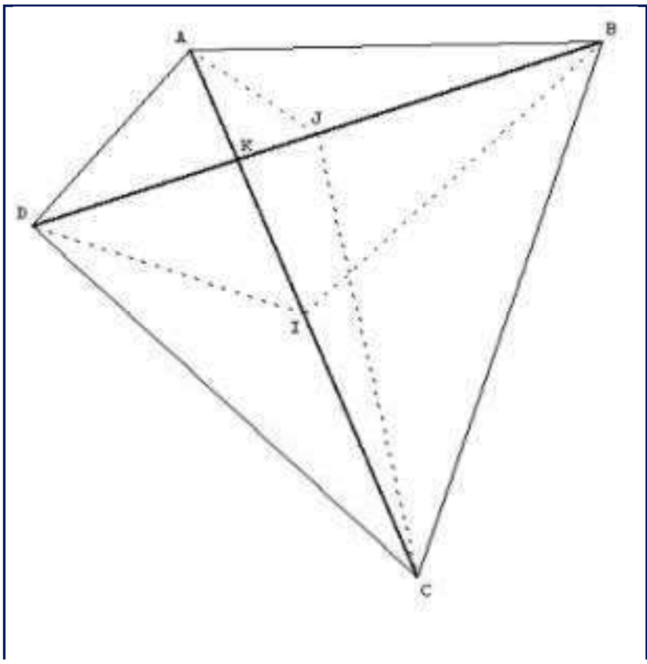
Corrigé de l'Exercice 2

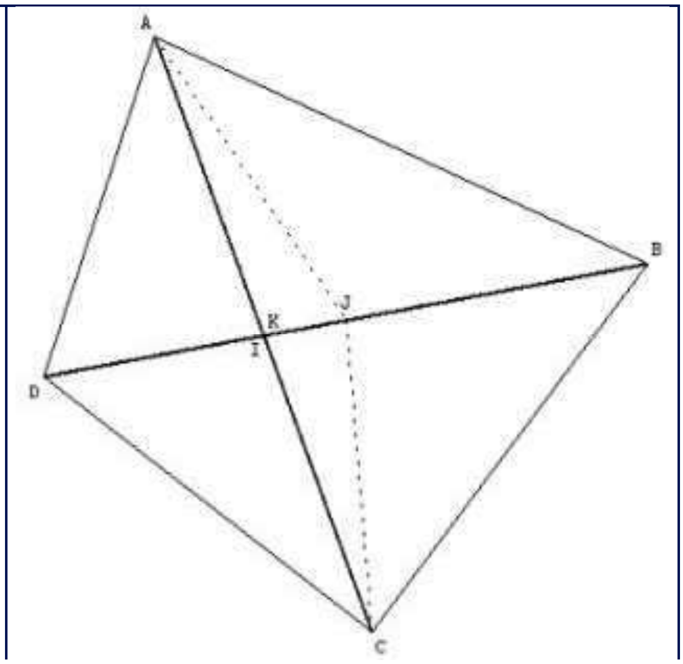
Rappel :
Soient A, B, C trois points non alignés. Un point M est tel que les aires des triangles ABM et ACM sont égales si et seulement si M appartient à la médiane issue de A du triangle ABC.

Dans le quadrilatère ABCD, on appelle I le milieu de la diagonale [AC], J celui de [BD] et K le point d'intersection de (AC) et (BD).
Pour que les triangles PAB et PBC aient la même aire, il faut que P appartienne a (BI).
De même, pour que les triangles PAB et PAD aient la même aire, il faut que P appartienne a (AJ) ; pour que les triangles PAD et PDC aient la même aire, il faut que P appartienne a (DI) ; et pour que les triangles PCD et PBC aient la même aire, il faut que P appartienne a (CJ) .
Donc P est le point commun des droites (AJ), (BI), (CJ) et (DI).

- Si le point I appartient à (BD), I est confondu avec K (seul point commun aux quatre droites précédentes) donc le point P existe si et seulement si I et J sont confondus c'est-à-dire si ABCD est un parallélogramme.

- Si le point I n'appartient pas à (BD), P doit être en I (point d'intersection de (BI) et (DI)), or P doit appartenir à (AJ) et (CJ) donc J doit appartenir à (AC).
  Si J appartient à (AC), il existe un unique point P : c'est I,
  si J n'appartient pas à (AC), il n'existe pas de tel point P.





Corrigé de l'Exercice 3

On veut montrer qu'un tel ensemble contient au plus 2005 éléments.

1°)Un tel ensemble existe :
Les entiers compris entre 2006 et 4010 contient 2005 éléments et répond à la question car tout « vrai » multiple d'un entier de cet ensemble est supérieur ou égal à 4012.

2°)Un tel ensemble ne peut pas contenir plus de 2005 éléments :
Tout entier naturel non nul s'écrit de manière unique $2^{\alpha}(2p+1)$ avec α et p des entiers naturels. Comme aucun élément n'est divisible par un autre, les facteurs impairs sont tous différents ; ces facteurs impairs étant compris entre 1 et 4009 , il n'y en a que 2005 différents. Dans un tel ensemble, il ne peut donc y avoir plus de 2005 éléments.

Note : on peut généraliser ce résultat en remplaçant 4010 par 2n et 2005 par n (n un entier naturel non nul)

Indications de solution

Rallye mathématique d'Alsace 2006
29 mars 2006

Classe de Terminale

Exercice 1

Considérons la rotation de centre A et d'angle 60°. Appelons P' l'image de P par cette rotation. Alors BP'=CP=5 et PP'=AP=3.
Ainsi $BP^2 + PP'^2 = 4^2 + 3^2 = 5^2 = PP'^2$ donc par la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle PP'B est rectangle en P. Ainsi $B\hat{P}P' = 90°$. Comme AP'P est équilatéral, on a aussi $P'\hat{P}A = 60°$ donc $A\hat{P}B = 150°$.
En appliquant la formule d'Al Kashi dans le triangle APB, on obtient
$AB^2 = 3^2 + 4^2 + 2.3.4.\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $AB = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$.

Exercice 2

Il y a 2*5012*5011 différences possibles et ces différences sont comprises entre -4024035 et 4024035.
Ainsi, on a 25115132 différences possibles qui ne peuvent prendre que 8048070 valeurs, comme 25115132>3*8048070, nécessairement 3 différences possibles prennent la même valeur.

Exercice 3

On a : $\frac{a}{b} = (a * b) * 1$ et $ab = (a * ((1 * b) * 1)) * 1$

Indications de solution

Rallye mathématique d'Alsace 2007
28 mars 2007

Classe de Terminales

Exercice 1

Cet exercice a été traîté de manière assez satisfaisante par bon nombre de candidats.

La différence s'est faite essentiellement sur le traitement de la troisième question.

1) Décomposer 5 euros : les 8 façons ont été presque toujours obtenues.
2) Décomposer 34 euros : là encore, pas de surprises, si ce n'est quelques oublis de configurations possibles.

A ce stade, certains ont déjà entrevu le lien avec la fameuse suite de Fibonacci, ce qui peut simplifier les calculs demandés.

3) Décomposer n euros : notant u_n le nombre de manières de décomposer n euros, on a $u_1=1$ et $u_2=2$. Pour obtenir une décomposition de n+2 euros, on prend une décomposition de n+1 euros à laquelle on rajoute 1 pièce de 1 euro ou on prend une décomposition de n euros à laquelle on rajoute une pièce de 2 euros.

Ainsi, on obtient la formule de récurrence $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$. Elle permet de calculer facilement les décompositions de 5 et 34 euros demandées et constitue une réponse valable à la troisième question.

Remarquons que certains binômes, partant de cette récurrence, ont explicité le terme général de la suite (u_n) manifestement étudiée dans de nombreuses terminales de l'Académie.

<u>*Conclusion*</u> : cet exercice a été relativement classant car de difficulté croissante et donc accessible au plus grand nombre. Le petit raisonnement de dénombrement proposé ici a été rencontré et correctement explicité dans quelques copies.

Exercice 2

1) Cet énoncé de géométrie du triangle a souvent dérouté les binômes qui s'y sont attelés. La formulation des questions nécessitait clairement de montrer que le point envisagé était effectivement solution du problème posé et qu'il était le seul. Autrement dit, une question d'existence et d'unicité.

Le centre de gravité : si G est le centre de gravité du triangle ABC, il est bien connu qu'il est situé sur chaque médiane de ABC, au tiers de la longueur de celle-ci en partant du pied.

Notons I le milieu de [BC], H le pied de la hauteur du triangle ABC issue de A et K celui de la hauteur du triangle GCB issue de G.

Si ABC est isocèle en A, il est facile de voir que Aire(GCB)=Aire(ABC)/3.

Si ABC n'est pas isocèle en A, alors H et I sont distincts.

Le théorème de Thalès donne GK/AH=GI/AI=1/3 et donc GK=AH/3.

Alors, Aire(BGC)=GK.BC/2=AH.BC/6=Aire(ABC)/3.

On procède de même pour les deux autres aires et donc le point G convient.

Si un point M intérieur au triangle ABC vérifie l'égalité des aires, alors Aire(MAB)=Aire(GAB)=Aire(ABC)/3.

Les triangles MAB et GAB ayant même aire et un côté commun [AB], M est sur la parallèle à la droite (AB) passant par G, les deux triangles ayant même hauteur. M est donc par symétrie sur la parallèle à la droite (BC) passant par G, donc M=G.

2) Le centre du cercle circonscrit : l'angle au centre étant le double de l'angle inscrit, on a aisément Aire(OAB)=R^2.sin(2C)/2 et de même pour Aire(OAC) et Aire(OBC). Ainsi, on obtient la relation

(*) Aire(OAB)/sin(2C)=Aire(OAC)/sin(2B)=Aire(OBC)/sin(2B).

Réciproquement, supposons que M est un point intérieur au triangle tel que Aire(MAB)/sin(2C)=Aire(MAC)/sin(2B)=Aire(MBC)/sin(2B) et notons α cette valeur commune.

On calcule l'aire du triangle ABC de deux manières.

M étant intérieur au triangle ABC, on a d'une part

$$\text{Aire(MAB)+Aire(MBC)+Aire(MAC)=Aire(ABC)}$$

et d'autre part

$$\text{Aire(MAB)+Aire(MBC)+Aire(MAC)}= \alpha(\sin(2A)+\sin(2B)+\sin(2C)).$$

O est également intérieur au triangle ABC donc

$$\text{Aire(ABC)=Aire(OAB)+Aire(OBC)+Aire(OAC)}= R^2(\sin(2A)+\sin(2B)+\sin(2C))/2.$$

On en déduit que $\alpha= R^2/2$ puis que

$$\text{Aire(MAB)}/\sin(2C)=\text{Aire(OAB)}/\sin(2C)$$

donc que

$$\text{Aire(MAB)=Aire(OAB)}.$$

M est donc sur la parallèle à la droite (AB) passant par O puis de même sur la parallèle à (BC) passant par O. Finalement, M=O et une solution à la question posée est donc (*).

Conclusion : la première question a été souvent abordée mais l'unicité rarement traitée de manière satisfaisante. La seconde question, plus difficile car la relation sur les aires n'était pas proposée dans l'énoncé, n'a guère eu de succès. Il est vrai qu'elle nécessitait davantage d'initiative.

Exercice 3

Le troisième exercice proposé était millésimé 2007 et sa résolution a connu selon les binômes des fortunes diverses. Très bien appréhendé par certains, l'énoncé a parfois été compris de manière erronée par d'autres.

Il s'agit de montrer que l'on peut trouver deux enfants effectuant le même déplacement latéral (au signe près) pour rejoindre leur gâteau.

Numérotons les enfants de 0 à 2006, ainsi que les gâteaux, en partant d'un des bouts de la table.

Les enfants sont donc aux abscisses 0,…2006 et après le passage du plaisantin, le gâteau de l'enfant i est à l'abscisse g_i. Son déplacement latéral est $d_i=g_i-i$ et il s'agit de montrer que deux tels déplacements au moins ont la même valeur absolue.

Si ce n'est pas le cas, les $|d_i|$ forment une permutation de 0,..,2006.

Il y a donc 1003 déplacements latéraux impairs et 1004 pairs.

La somme des déplacements est nulle car la somme des i est égale à celle des g_i.

La somme des 1003 déplacements impairs est un entier impair et celle des 1004 déplacements pairs est un entier pair : leur somme ne peut pas être nulle, d'où la solution de l'exercice.

Conclusion : cet énoncé gourmand était aux yeux des concepteurs du Rallye le plus délicat. La mise en forme du problème posé constituait une part non négligeable de la résolution. Des solutions fort correctes ont été rencontrées, ce dont nous nous réjouissons. Le lecteur attentif de ces lignes pourra généraliser cet exercice pâtissier à des entiers autres que 2007.

Indications de solution

Rallye mathématique d'Alsace 2008
5 mars 2008

Classe de Terminale

Exercice 1

Une méthode simple de résolution, après avoir remarqué que tous les multiples de 10 conviennent est par exemple, notant x l'entier cherché, d'écrire que $x^2=100y^2+r$, avec y entier et compris entre 1 et 99.

Ensuite la factorisation $x^2-100y^2=(x-10y)(x+10y)$ permet d'examiner les cas suivants :
$x-10y=1$, donc $x+10y=20y+1<100$, donc y inférieur à 4.
$x-10y=2$, donc $x+10y=20y+2<50$,donc y inférieur à 2.
$x-10y=3$ ou 4 donc de même y inférieur à 1.
$x-10y$ supérieur à 5, est exclu car on aurait alors $20y+5$ inférieur à 20, ce qui n'est pas.

On déduit alors qu'outre les multiples de 10, les nombres cherchés sont 11,12,13,14,21,22,31 et 41.

Cet énoncé a été correctement abordé par un nombre significatif de binômes. Certains ont été gênés pour formuler de manière exploitable le fait qu'un entier est un carré, ainsi que le nombre obtenu en enlevant ses deux derniers chiffres. Les raisonnements combinant à la fois l'aspect arithmétique (factorisation des entiers) et les majorations pour limiter le nombre de cas à étudier ne sont pas toujours vus de manière efficace : cela semble être peu courant chez un élève de terminale.

Exercice 2

La suite est ainsi formée : on part de deux chiffres et le suivant est le chiffre des unités de la somme des deux précédents.

Si on connaît deux termes consécutifs, il est clair que les suivants sont entièrement déterminés (inutile d'insister).
Il suffit donc de montrer que si deux termes consécutifs sont connus, le précédent l'est aussi.
Supposons u_{n+1}et u_{n+2} connus et trouvons u_n.
En effet, soit $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ et alors cela suppose $u_{n+2}-u_{n+1}\geq 0$, soit $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n-10$ et cela suppose $u_{n+2}-u_{n+1}<0$. On a donc finalement $u_n= u_{n+2}-u_{n+1}$ si $u_{n+2}-u_{n+1}\geq 0$ et $u_{n+2}-u_{n+1}+10$ si $u_{n+2}-u_{n+1}<0$.

On applique ce procédé de calcul pour trouver les deux premiers termes de la suite proposée :

Les termes du rang 2003 au rang 2008 sont 2,6,8,4,2,6.
La première question assure une périodicité de période 4.
On a donc $u_4=u_{2008}=6$ et $u_3=u_{2007}=2$, donc $u_1=8$ et $u_2=4$.

Pour la périodicité, une possibilité de résolution est le fameux principe des « tiroirs » de Dirichlet : si n+1 objets sont rangés dans n boîtes, alors une des boîtes contient au moins 2 objets.
On considère une telle suite et on regarde les 202 premiers termes, regroupés en 101 couples de termes consécutifs. Nous avons 101 objets et 100 valeurs possibles (100=10x10). On a donc deux couples égaux. Si l'un d'eux est (u_1,u_2), c'est gagné, sinon la première question assure en remontant que le couple (u_1,u_2) est aussi répété.

Cet exercice est apparu comme difficile pour ce qui concerne les deux dernières questions. Il a été cependant bien traité dans un nombre très significatif de copies. On peut s'en réjouir.
Le vocabulaire « entièrement déterminé » n'a parfois pas été clairement compris. Là encore, ce petit exercice hors des sentiers battus nécessite un certain recul, qui a été observé dans de fort bonnes copies.
La résolution demande de la précision et la notation séquentielle simplifie considérablement la rédaction.

Exercice 3

Dans cet exercice, on disposait au départ de 5 allumettes à placer de façon à « clôturer » une figure formée de triangles isocèles consécutifs.

En utilisant les propriétés élémentaires des angles (triangles isocèles, angles supplémentaires et somme des angles d'un triangle) on détermine facilement que l'angle cherché mesure $\frac{\pi}{5}$ rad. De même si l'on dispose de 7 allumettes, l'angle mesure $\frac{\pi}{7}$ rad. La généralisation (en utilisant les mêmes arguments) permet d'obtenir pour 2n+1 allumettes un angle de $\frac{\pi}{2n+1}$ rad.

Il était aussi possible de résoudre cet exercice en remarquant que les angles à la base des triangles isocèles successifs étaient en progression arithmétique.

Si les deux cas particuliers ont été bien traîtés , la formule générale a souvent été donnée sans être démontrée, les élèves étant peu familiers avec un usage rigoureux des indices. Nous avons trouvé beaucoup de copies utilisant les formules d'Al Kashi ou celles de trigonométrie, ce qui aboutissait à des équations trigonométriques insolubles à leur niveau.

BILAN : là encore, pour les détails de chaque exercice, on se reportera aux commentaires ci-dessus. Les énoncés proposés cette année aux terminales étaient d'un bon niveau et les copies produites fort satisfaisantes. Les deux derniers exercices nécessitaient de la rigueur, de l'imagination et de l'initiative. Elles ont été au rendez-vous, dans les copies primées en particulier. Nous en félicitons les auteurs.

Corrigé des exercices Rallye Mathématique d'Alsace 2009
Terminale

Exercice 1:

L'énoncé se traduit par le système (S) d'inéquations: $\begin{cases} A \geq 2n \\ 200 \leq L \leq 300 \\ A \times L \times n = 50\,127 \\ L \geq 7\mathrm{A} \end{cases}$

Condition sur A : $7A \leq L \leq 300 \quad \Leftrightarrow A \leq 42$.
Condition sur n : $7 \times 2n \leq 7A \leq L \leq 300 \quad \Leftrightarrow n \leq 21$.

Condition sur An : $200\,An \leq A\,n\,L \leq 300\,A\,n \quad \Leftrightarrow 168 \leq A\,n \leq 250$.

Puisque $A\,n\,L = 50\,127$, on cherche dans la décomposition en facteurs premiers de 50 127, les produits compris entre 168 et 250.
$50\,127 = 3 \times 7^2 \times 11 \times 31$
Seuls les produits $3 \times 7 \times 11$ et 7×31 conviennent.

- Si on pose $A = 31$; $n = 7$ alors $L = 231$.
  ce triplet vérifie toutes les inéquations du système (S) donc il existe au moins un triplet-solution.
- En testant toutes les possibilités avec le choix $A\,n = 3 \times 7 \times 11$, il n'y a aucun triplet-solution de (S).

L'esquimau a bien raison:
Il a 31 ans, son traîneau mesure 2,31 m et son attelage a 7 chiens.

Exercice 2:

1. Réseau à un seul noeud:

La longueur totale du réseau est $MA + MB + MC + MD$.
D'après l'inégalité triangulaire: $MA + MC \geq AC$ avec égalité si et seulement si le point M appartient au segment $[AC]$.
Comme on cherche le chemin de longueur minimal, le point M doit appartenir au segment $[AC]$.

De même pour minimiser $MB + MD$, le point M doit appartenir au segment $[BD]$.

Donc la longueur du réseau est minimale lorsque M est le point d'intersection de $[AC]$ et $[BD]$, soit le centre du carré *ABCD.*
La longueur du réseau sera $L_1 = 2\,AC = 2\sqrt{2}\,a$.

2. Réseau à 2 moeuds:

a. *ABCD* est un carré de centre *O*.
Soient I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$ puis M et N les milieux respectifs des segments $[OI]$ et $[OJ]$.

La longueur totale du réseau est $L_2 = MA + MD + NC + NB + MN$.
En appliquant le théorème de Pythagore, on obtient $L_2 = a\left(\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)$ et $L_1 > L_2$.
Un circuit à 2 noeuds peut donc fournir un meilleur résultat que précédemment.

b. En conservant les mêmes notations qu'au 2..a. et en notant α l'angle $\widehat{ABM}$ avec $\alpha \in \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$.

Longueur *MN:*

$IM = IB\tan\alpha = \frac{a}{2}\tan\alpha$; $NJ = IM$; $MN = -(NJ + IM) = a(1-\tan\alpha)$.

Longueur *MB :*

$IB = MB \times \cos\alpha = \frac{a}{2}$ donc $MB = \frac{a}{2\cos\alpha}$.

Longueur totale du réseau: $f(\alpha)$

$$f(\alpha) = MN + 4\times MB = a(1-\tan\alpha) + 4\frac{a}{2\cos\alpha} = a\left(1+\frac{2-\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) .$$

Etude de la fonction *f* sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$:

$$f'(\alpha) = a\left(\frac{2\sin\alpha - 1}{\cos^2\alpha}\right) .$$

$f'(\alpha) \leq 0$ pour $\sin\alpha \leq \frac{1}{2}$ soit $\alpha \in \left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$, et $f'(\alpha) \geq 0$ pour $\alpha \in \left[\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{4}\right]$.

La fonction f admet un minimum sur $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ atteint en $\frac{\pi}{6}$, ce minimum est égal à

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = a(1+\sqrt{3})$.

Le réseau symétrique à 2 noeuds de longueur minimale est tel que $\widehat{ABM} = \frac{\pi}{6}$ et sa longueur est $a(1+\sqrt{3})$.

Exercice 3 :

1. $R(n)$ nombre de chemins auto-évitants pour un échiquier composé de 3 lignes et *n* colonnes.

On vérifie directement que $R(1)=1$ et $R(2)=4$.

2. Détermination d'un relation de récurrence pour le calcul de $R(n)$:

On détermine tous les chemins possibles en notant $(i\,;j)$ la positon de la case dans l'échiquier (ième ligne, jème colonne)

1. le chemin $(1\,;1) \to (2{,}1) \to (3\,;1)$.
2. les chemins évitant la case $(2\,;1)$: ces trajectoires doivent commencer par $(1\,;1) \to (2\,;1)$ et finir par $(3\,;2) \to (3\,;1)$. Il y a $R(n-1)$ tels chemins.
3. les chemins commençant par $(1\,;1) \to (2\,;1) \to (2\,;2)$ et ne retournant jamais à la première ligne. Il y a $n-1$ chemins de cette sorte.
4. les chemins commençant par $(1\,;1) \to (2\,;1) \to ...... \to (2\,;k) \to (1\,;k) \to (1\,;k+1)$ et se terminant par $(3\,;k+1) \to (3\,;k) \to (3\,;k-1) \to ...... \to (3\,;2) \to (3\,;1)$ pour $2 \leq k \leq n-1$.
   Il y a $R(n-2) + R(n-3) + ... + R(1)$ tels chemins.

5. les chemins commençant par $(1\,;1)\rightarrow(1\,;2)$ et n'entrentt pas dans la troisième ligne avant la dernière case. Ces chemins finissent par $(2\,;2)\rightarrow(2\,;1)\rightarrow(3\,;1)$.
   Il y a $n-1$ chemins de cette sorte.
6. les chemins commençant par $(1\,;1)\rightarrow(2\,;1)\rightarrow......\rightarrow(2\,;k)\rightarrow(1\,;k)\rightarrow(1\,;k+1)$ et se terminant par $(3\,;k+1)\rightarrow(3\,;k)\rightarrow(3\,;k-1)\rightarrow......\rightarrow(3\,;2)\rightarrow(3\,;1)$ pour $2\leq k\leq n-1$.
   Il y a $R(n-2)+R(n-3)+.............+R(1)$ tels chemins.

On obtient la relation :

$$R(n)=1+R(n-1)+2\big((n-1)+R(n-2)+R(n-3)+.............+R(1)\big)$$

$$R(n)=2n-1+R(n-1)+2\big(R(n-2)+R(n-3)+.............+R(1)\big)$$

donc $R(n+1)=2n+1+R(n)+2\big(R(n-1)+R(n-2)+.............+R(1)\big)$

d'où: $R(n+1)-R(n)=2+R(n)+R(n-1)$

par conséquence: $R(n+1)=2R(n)+R(n-1)+2$ ou $R(n+2)=2R(n+1)+R(n)+2$

On vérifie que $R(3)=2R(2)+R(1)+2=11$.

De même $R(4)=2R(3)+R(2)+2=28$ et $R(5)=2R(4)+R(3)+2=69$

Pour déterminer $R(2009)$ on peut utiliser cette formule de récurrence....travail fastidieux mais possible !

3. Relation implicite pour $R(n)$:(non attendue)

Soit $u_n=R(n)+1$. On obtient la relation $u_{n+2}=2u_{n+1}+u_n$ et $u_1=2$ et $u_2=5$.

La suite (u_n) est définie par la relation linéaire de double récurrence.

Les suites géométriques vérifiant cette relation sont celles de raison $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$.
Il existe alors deux réels a et b tels que $u_n=a\big(1-\sqrt{2}\big)^n+b\big(1+\sqrt{2}\big)^n$.
les deux réels a et b se déterminent à l'aide des deux premiers termes de la suite $u_1=2$ et $u_2=5$

Finalement $u_n=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\big(1+\sqrt{2}\big)^{n+1}-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\big(1-\sqrt{2}\big)^{n+1}$

et $R(n)=u_n-1=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\big(1+\sqrt{2}\big)^{n+1}-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\big(1-\sqrt{2}\big)^{n+1}-1$.

Vérification avec $n=3$: $R(3)=u_3-1=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\big(1+\sqrt{2}\big)^4-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\big(1-\sqrt{2}\big)^4-1=11$.

CORRIGE DU RALLYE 2010 DES CLASSES DE TERMINALES

Exercice 1 :

Le poids minimal de 9 poids est m=1+2+…+9=45g.
Le poids maximal de 9 poids est M=11+12+…+19=135g.
La différence est alors de 90g.
Toute autre répartition des poids en bronze et en argent donnera donc une différence M-m strictement inférieure à 90g.
Les 9 poids en bronze sont donc ceux de 1g,2g,…,9g et les poids en argent sont ceux de 11g,12g,…,19g.
Le poids en or est le poids restant, c'est-à-dire celui de 10g.

Exercice 2 :

On va montrer le résultat par récurrence.
On note A_n l'entier naturel ayant 3^n chiffres tous égaux à 1.
A_1=111 qui est divisible par 3^1 mais pas par 3^2.
Soit un entier naturel n non nul.
Supposons que A_n est divisible par 3^n mais pas par 3^{n+1}.
Montrons que A_{n+1} est divisible par 3^{n+1} mais pas par 3^{n+2}.
On a $A_{n+1}\, 1\underbrace{0...0}_{3^n-1}1\underbrace{0...0}_{3^n-1}1 \times A_n$ et $1\underbrace{0...0}_{3^n-1}1\underbrace{0...0}_{3^n-1}1$ est divisible par 3 mais pas par 9.
Ainsi A_{n+1} est divisible par 3^{n+1} mais pas par 3^{n+2}.
En particulier pour n=2010 on a le résultat voulu.

Exercice 3 :

Choisissons pour l'instant A' quelconque sur le côté [BC] et notons E et F les symétriques respectifs de A' par rapport aux droites (AB) et (AC).
Alors, pour tous B' et C' respectivement sur [AC] et [AB], on a :
A'C'+C'B'+B'A'=EC'+C'B'+B'F$\geq$EF (inégalité triangulaire).
Pour A' fixé, les choix optimaux pour B' et C' sont les intersections de (EF) avec les côtés du triangle. Le périmètre du triangle A'B'C' ainsi obtenu, est alors égal à la longueur du segment [EF].
On est donc ramené à chercher le point A' de telle sorte que le segment [EF] ait une longueur minimale.
Notons que le triangle AEF est toujours isocèle en A d'angle en A valant 2 fois l'angle BAC. La longueur du segment [EF] est donc proportionnelle à celle de [AA'] donc minimale lorsque A' est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
De même, on obtient que B' et C' sont les pieds des deux autres hauteurs.

Rallye Mathématique d'Alsace 2011
Classes de Terminale

Exercice 1

1.En appliquant la consigne, les premiers nombres non barrés sont 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 10 ; 13 ; 16 ; 19...
Conjecture:
L'ensemble E des nombres non barrés est composé de 2 et des nombres de la forme 3 *p*+1, avec *p* élément de $\mathbb{N}$.

Démonstration par récurrence: Soit P_n la propriété: Pour tout $k \leq n$, *k* élément de E si et seulement si $k = 2$ où k est de la forme $3\text{p}+1$ avec p un entier naturel.

Initialisation: P_0 , P_1 , P_2 , P_3 et P_4 sont vraies.

Hérédité: Soit n un entier naturel. On suppose P_n vraie et avec n=3p+1 . Ainsi n est non barré.
Donc
n+1 est barré (car n et 1 non barrés)
n+ 2 est barré (car n et 2 non barrés)
Pour *n*+3, cherchons s'il existe deux entiers naturels *x* et *y* , éléments de E, tels que n + 3 = x + y.
On aurait alors 3p+ 4 = x + y.

Par disjonction des cas:
Quand on effectue la division euclidienne de x par 3, on a 3 restes possibles : 0, 1, ou 2. Ainsi x est de la forme 3m, 3m+1 ou 3m+2.

Si x=3m alors x serait barré, donc n'est pas un élément de E.
Si x=3m+1 alors y=3(p-m+1) : alors y serait barré, donc n'est pas un élément de E..
Soit x=3m+2 alors y=3(p-m)+2 : c'est impossible car le seul nombre de la forme 3r+2 non barré est 2, et les deux nombres non barrés additionnés doivent être distincts.
Donc il n'existe pas deux nombres x et y tels que x+y=n+3 donc n+3 appartient à E

Donc P_{n+1} , P_{n+2} et P_{n+3} sont vraies.

Conclusion: la propriété P_n est vraie pour tout *n* entier naturel.

Ainsi : tout nombre non barré et supérieur à 3 est congru à 1 modulo 3.

- $2010 \equiv 0 \quad [3]$ donc 2010 est barré.
- $2011 \equiv 1 \quad [3]$ donc 2011 non barré.

2. En appliquant la consigne, les premiers nombres non barrés sont 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; ...

Conjecture: L'ensemble F des nombres non barrés est composé des puissances de 2, soit 2^n , n entier naturel.

Démonstration par récurrence: Soit P_n la propriété: Pour tout entier naturel non nul $k \le 2^n$,

k est élément de F (i.e. est barré) si et seulement si $k = 2^i$, $i \le n$.

Initialisation: $2^0 = 1$, 1 est non barré donc P_1 est vraie.
Hérédité: On suppose P_n vraie, donc pour tout nombre $k \le 2^n$, soit k est une puissance de 2 (et est non barré), soit k est la somme de puissances de 2 distinctes (et est barré).
Pour démontrer que P_{n+1} est vraie, il nous reste à étudier les entiers compris entre $2^n + 1$ et 2^{n+1} . Il s'agit de démontrer d'une part que tous les entiers compris entre $2^n + 1$ et $2^{n+1} - 1$ sont barrés et d'autre part que 2^{n+1} est non barré.
Pour les les entiers compris entre $2^n + 1$ et $2^{n+1} - 1$, on peut les écrire sous la forme $2^n + k$ où $k < 2^n$.
Si k est une puissance de 2 , le nombre $2^n + k$ est la somme d' éléments de F , donc barré.
Si k n' est pas une puissance de 2, comme $k < 2^n$, par hypothèse de récurrence, il est la somme d' éléments de F donc le nombre $2^n + k$ est la somme d' éléments de F , donc barré.

Il reste à démontrer que 2^{n+1} est non barré.

Le plus grand nombre qui puisse être formé à partir des éléments de F obtenus jusque là est $\sum_{i=0}^{n} 2^i$. Cette somme est la somme des termes d'une suite géométrique de raison 2 et vaut $2^{n+1} - 1 < 2^{n+1}$.
2^{n+1} n'étant pas la somme d'éléments de F, il est non barré.

Conclusion: la propriété P_n est vraie pour tout n entier naturel.

Tout nombre non barré est une puissance de 2.

2010 est divisible par 3 et 2011 est impair donc 2010 et 2011 ne sont pas des puissances de 2 et seront barrés.

Exercice 2:

Soient x , y et z les trois nombres trouvés par Claudine.
Supposons que $x \le y \le z$.

Chacun des trois nombres divise la somme des trois donc: $\begin{cases} x | x+y+z \\ y | x+y+z \\ z | x+y+z \end{cases}$.

Comme $z | x+y+z$ alors $z | x+y$ et $z \leq x+y$.
De plus $x \leq y \leq z$ donc $z \leq x+y \leq 2z$.

$x+y$ étant un multiple de z , on a soit $x+y=z$ soit $x+y=2z$.

1er Cas $x+y=z$ **:**
$y | x+y+z$ donc $y | 2(x+y)$ puis $y | 2x$ et $y \leq 2x$.
On obtient l'encadrement $x \leq y \leq 2x$ avec $y | 2x$
donc soit $y=x$ soit $y=2x$.

•Si $y=x$, $z=2x$ et les triplets sont de la forme $(x\,;x\,;2x)$.
Sachant de plus que l'un des nombres est égal à 51,nombre impair, on obtient 1 triplet $(51\,;51\,;102)$.

•Si $y=2x$, $z=3x$ et les triplets sont de la forme $(x\,;2x\,;3x)$.
Sachant de plus que l'un des nombres est égal à 51,nombre impair et tel que $51=3\times 17$, on obtient 2 triplets $(51\,;102\,;153)$ et $(17\,;34\,;51)$.

2iè Cas $x+y=2z$
$\begin{cases} x | x+y+z \\ y | x+y+z \\ z | x+y+z \end{cases}$ donc $\begin{cases} x | 3z \\ y | 3z \\ z | 3z \end{cases}$. On a alors $x \leq y \leq z \leq 3z$.

Seule possibilité: $x=y=z$.
L'un des trois nombres étant égal à 51, un seul triplet convient $(51\,;51\,;51)$.

Conclusion:
Il y a bien 4 triplets-solutions, mais un seul tel que 51 ne soit pas le plus petit des trois nombres; C'est le triplet $(17\,;34\,;51)$.

Exercice 3:

Pour tout entier naturel n : $\begin{cases} f(n)=n-2010 \quad si \quad n>3000 \\ f(n)=f(f(n+2011)) \quad si \quad n\leq 3000 \end{cases}$.

Donc pour tout $i \geq 990$, $\begin{aligned} f(i) &= f(f(i+2011)) \\ &= f(i+2011-2010) \quad \text{car i+2011>3000} \\ &= f(i+1) \end{aligned}$

Ainsi on a en particulier $f(2011)=f(5011)$, donc aussi :

$$
\begin{aligned}
f(0) &= f\left(f(2011)\right) \\
&= f\left(f(5011)\right) \\
&= f\left(5011-2010\right) \\
&= f\left(3001\right) \\
&= 3001-2010 \\
&= 991
\end{aligned}
$$
.

Commentaires et solutions pour le Rallye de Terminale 2012

Exercice 1

On raisonne par l'absurde.
Supposons que 4 points quelconques (ou plus) ne sont jamais alignés.

Les droites tracées passent donc soit par deux de ces points soit par trois de ces points.

Il y a $\binom{66}{2}$ manières de choisir deux points parmi les 66 points distincts, soit $33\times65=2\,145$ paires possibles de points.

Soit n le nombre de triplets de points alignés.
Soit $\{A\,;B\}$ une paire de points.

- Si $\{A\,;B\}$ ne fait pas partie d'un des n triplets, il détermine une seule droite, qui n'est déterminée par aucune autre paire de points.
- Si $\{A\,;B\}$ fait partie d'un des n triplets, il détermine une droite qui est comptée trois fois (car d'après l'hypothèse, il y a au maximum 3 points distincts alignés) . Chaque triplet est donc comptabilisé trois fois dans les 2 145 paires de points possibles, soit deux fois de trop.

Ainsi, le nombre total de droites est $2012=2145-2n$.
Cette égalité est impossible pour des raisons de parité.
Il y a donc au moins 4 points qui sont alignés.

Exercice 2

Soit $C=\overline{abcd}$ mon code secret, $a\,,b\,,c\,,d$ étant des chiffres distincts et non nuls .
La somme de tous les nombres possibles formés avec deux de ces quatre chiffres est :

$$\begin{aligned}S&=\overline{ab}+\overline{ac}+\overline{ad}+\overline{ba}+\overline{bc}+\overline{bd}+\overline{ca}+\overline{cb}+\overline{cd}+\overline{da}+\overline{db}+\overline{dc}\\&=10a+b+10a+c+10a+d+....+10d+a+10d+b+10d+c\\&=33(a+b+c+d)\end{aligned}$$

- En multipliant cette somme S par 7, je retrouve mon code, donc $C=7S$.

Soit $s=a+b+c+d$ la somme des chiffres de C.
Alors $C=7\times33s=7\times3\times11s=77\times3s=231s$.

- C est un multiple de 3 donc la somme de ses chiffres aussi. Soit $s=3s'$.

Par suite $C=77\times3\times3s'=77\times9s'$.
C est donc un multiple de 9. Or, si un nombre est divisible par 9, la somme de ses chiffres aussi, donc s est aussi divisible par 9.

- Le plus petit code possible formé de 4 chiffres distincts est 1234, le plus grand est 9876.

On a l'encadrement $10\leq s\leq30$.

- On cherche s multiple de 9 tel que $10\leq s\leq30$.

Les valeurs possibles de s sont 18 et 27.
En étudiant chaque cas :

Si $s = 18$: $C=231s=231\times18=4\,158$.
La somme des chiffres de 4 158 est égale à 18.

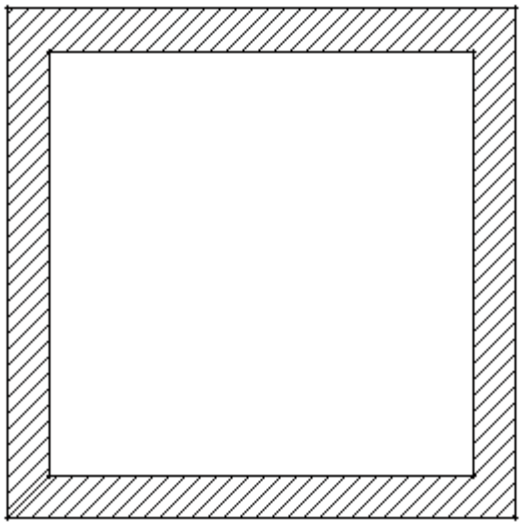
Si $s = 27$: $C=231s=231\times27=6\,237$.
La somme des chiffres de 6 237 n'est pas égale à 27.

Mon code est donc 4 158.

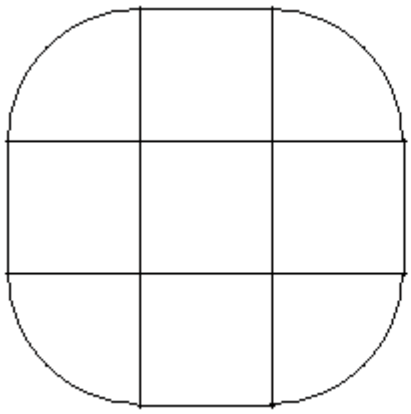
Exercice 3

Soit C le centre de la base de cylindre. D'après l'énoncé, C doit être au moins à une distance 1 du bord de la cour.

Donc C n'appartient pas à la bande sur le bord intérieur de la cour de surface $37^2-35^2=144$.



Considérons la base d'une boîte cubique de côté 1. C doit être au moins à distance 1 de tout point du carré, autrement dit C ne peut pas être dans la région représentée ur la figure ci-dessous, délimitée par cinq carrés de côté 1 (le carré central représentant la base du cube) et quatre arcs de cercle de rayon 1 ayant pour centre les sommets de la base du cube.
Cette surface vaut $\pi+5$.



Les 150 boîtes et le bord interdisent une surface totale de $A=150(\pi+5)+144$.
La surface S restant disponible est égale à $S=37^2-A=475-150(\pi+5)>0$.
Donc certains points de la cour ne sont pas interdits à C.

Il reste donc suffisamment de place pour déposer le tonneau cylindrique.