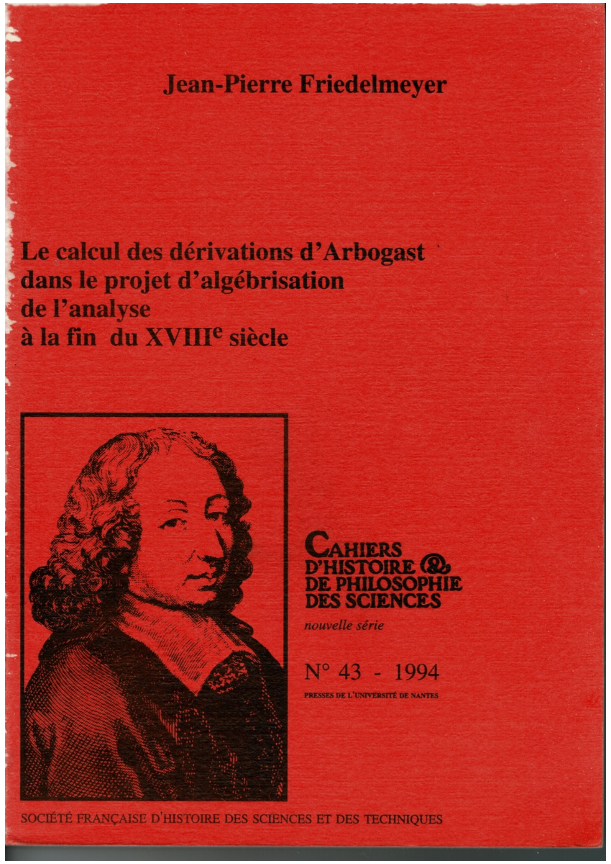
Qu‘est-ce que c‘est une aire?

En hommage à Jean-Pierre Friedelmeyer

Une idée importante

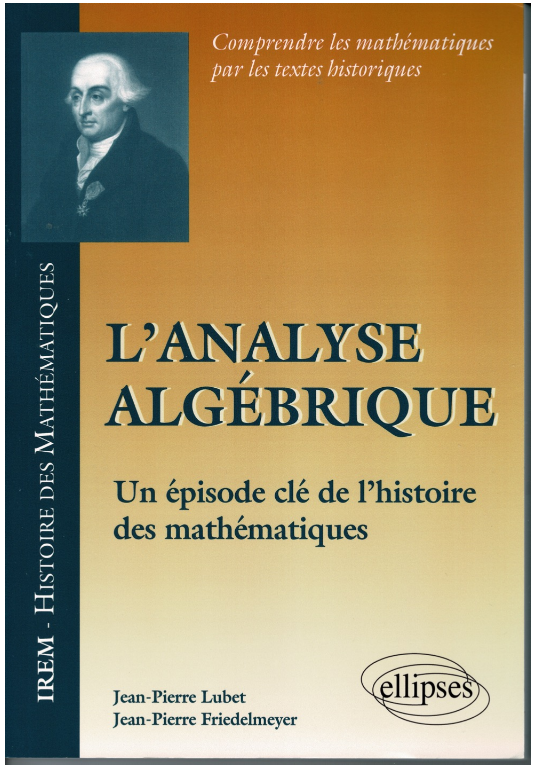
Jean-Pierre s‘est intéressé à l‘idée „Comment peut-on éviter des procédes „infinis“.“ Il a consacré sa thèse à un mathématicien alsacien nommé Louis François Antoine Arbogast (1759 -1803) qui a publié en 1800 un livre „Du calcul des dérivations“ dans lequel il a élaboré ses idées, comment réduire l‘analyse à l‘algèbre.

Voilà:



Une idée importante

Une des dernières publications de Jean-Pierre – en collaboration avec son ami Jean-Pierre Lubet (Lille) - présentait „L'analyse algébrique“.



Eviter l‘infini en géométrie

Mais cette idée n‘est pas limitée à l‘analyse. Elle a aussi des applications en géométrie, ce que nous avons étudié ensemble – entr‘autre dans un petit groupe de l‘IREM de Strasbourg dirigé par Jean-Pierre.

C‘est cette idée aujourd‘hui appellée „équidécomposabilité“ que je veux vous présenter.

En 1872 R. Dedekind écrit que jusqu‘à ce jour-là personne n‘avait encore démontré que racine de 2 fois racine de 3 fait racine de 6. Bien sûr il voulait critiquer les fondements des nombres réels – insatisfaisants selon lui. Mais on peut lire sa critique aussi avec les yeux géométriques: on n‘a pas encore démontré la formule qui donne la surface d‘un rectangle en fonction de ses côtés.

Le mémoire de Gerwien

(Crelle Journal 10 (1833), 224 – 234 und 235 – 240)

16.

Zerschneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen geradlinigen Figuren in dieselben Stücke.

(Von Herrn *Gerwien*, Pr. Lieut. im Königl. Preufs. 22sten Inf. Regim.)

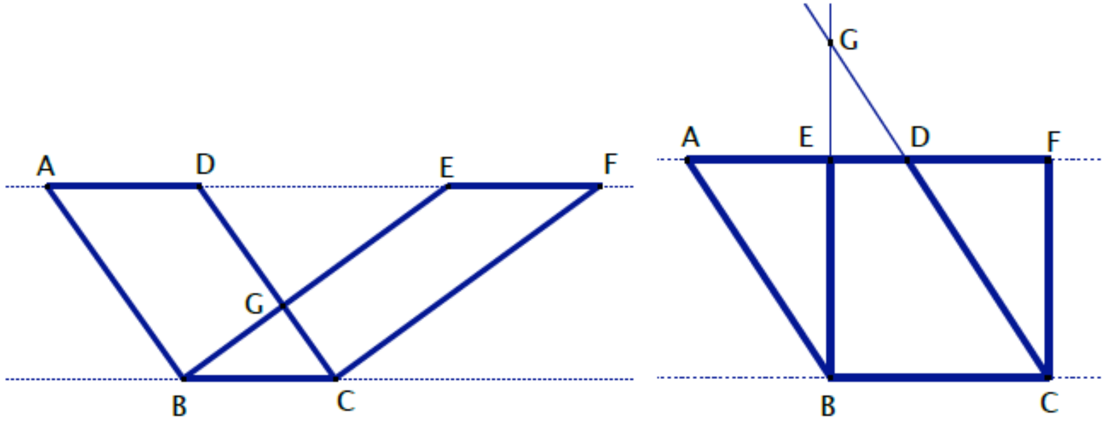
17.

Zerschneidung jeder beliebigen Menge verschieden gestalteter Figuren von gleichem Inhalt auf der Kugelfläche in dieselben Stücke.

(Vom Herrn *P. Gerwien*, Pr. Lieuten. im Königl. Preufs. 22sten Inf. Reg.)

Les aires chez Euclide, premier livre

I, 35



Une première définition

Une idée: Deux polygones sont dits **équidécomposables** si on peut les décomposer en des pièces congruentes (isométriques).

Cf. le jeu de Tangram.

Deux polygones équidécomposables ont même aire.

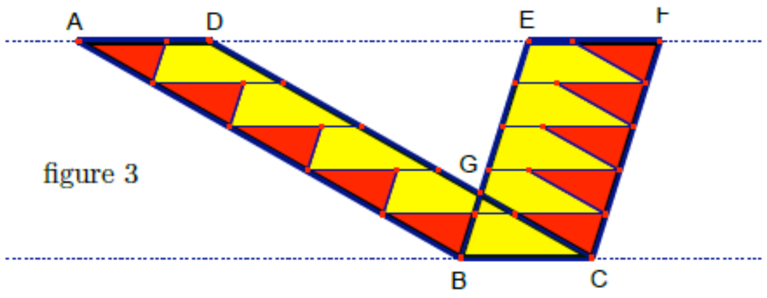
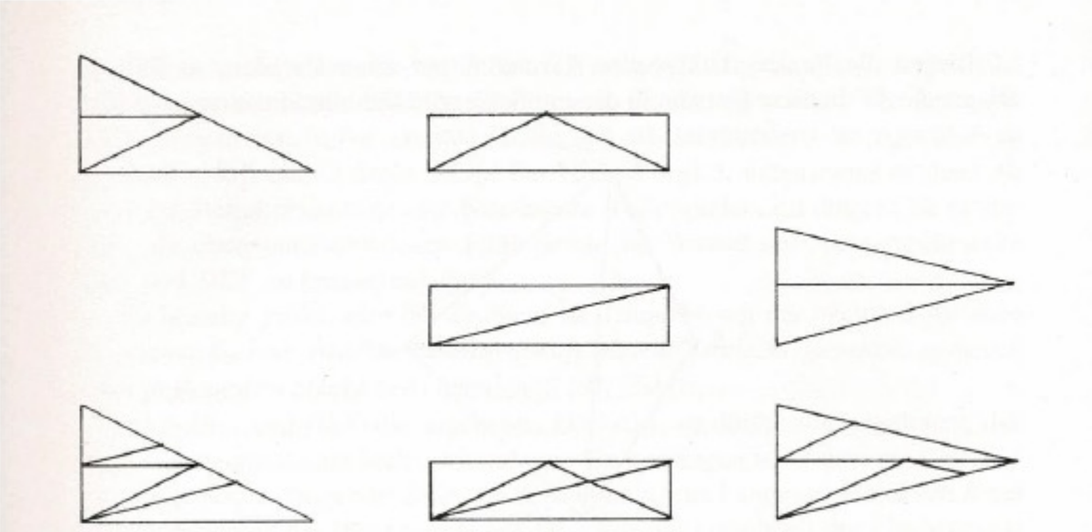


figure 3

Une remarque en langue moderne

La relation „être équidécomposable“ est une relation d‘équivalence.

La symétrie et la reflexibilité sont évidentes, la transitivité ne l‘est pas.



Figur 6.

Gerwien et son article

Il veut comparer la théorie de l'équidécomposabilité avec la théorie standard qu'on peut caractériser comme la théorie de la mesure.

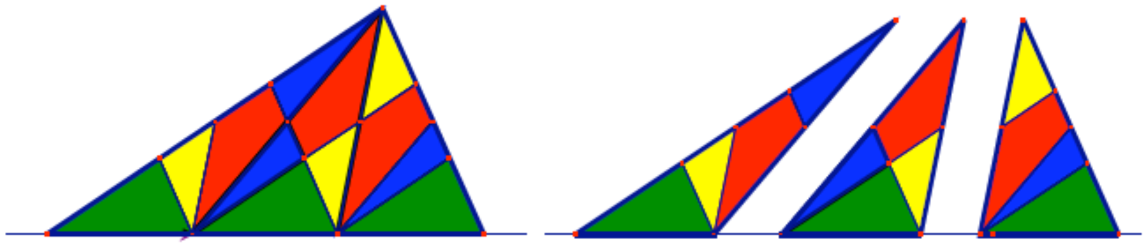
Le point crucial: Est-ce qu'on peut démontrer que deux polygones de même aire (dans le sens de la mesure) sont aussi équidécomposables?

C'était un point de vue assez abstrait en 1833!

Notez aussi que Gerwien a développé sa théorie aussi en géométrie sphérique!

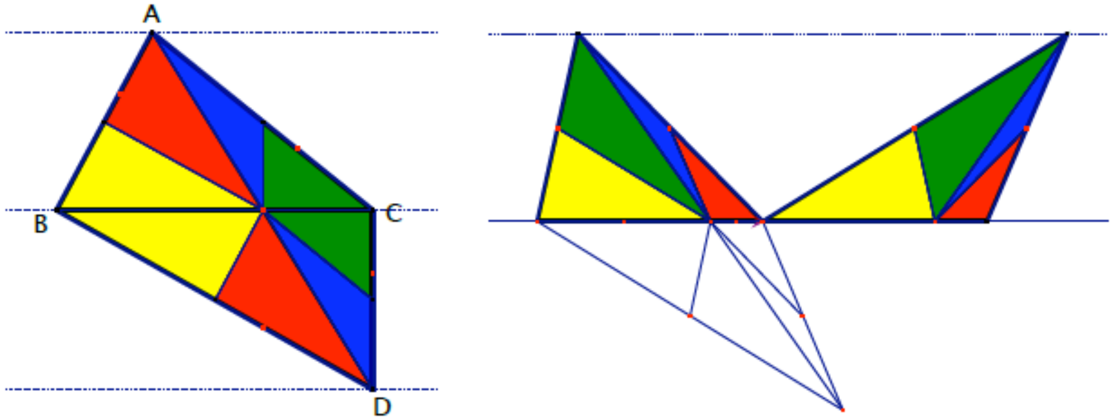
La démonstration

1re étape:

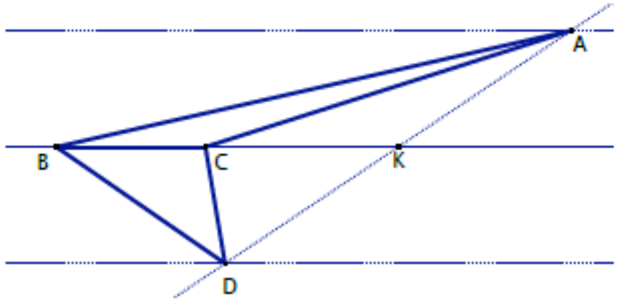


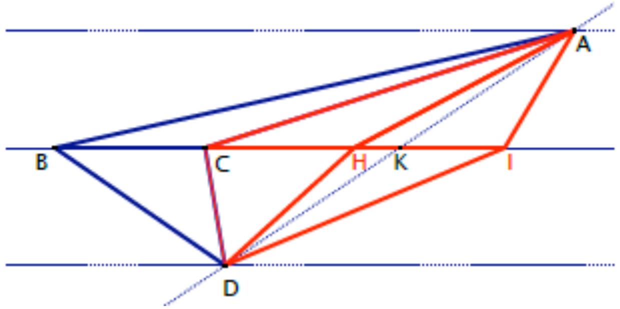
La démonstration

2me étape



Une difficulté





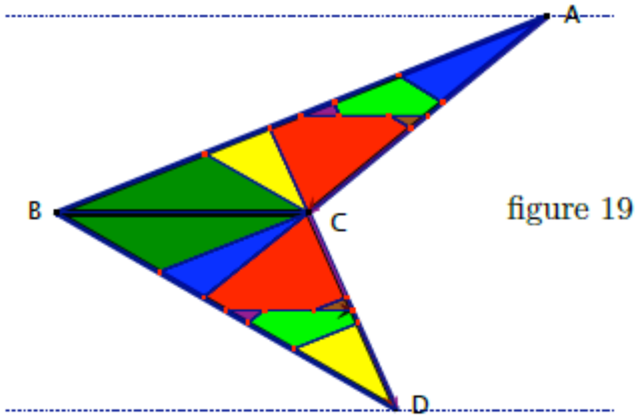
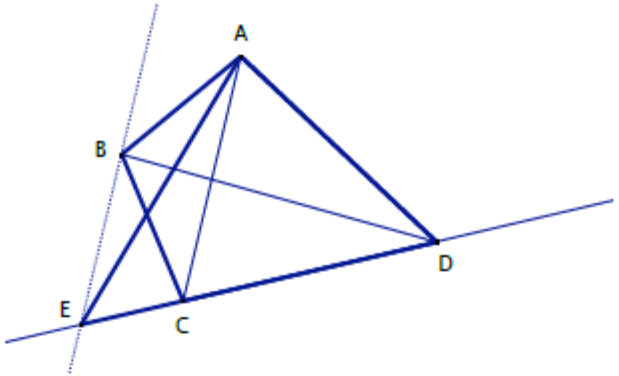
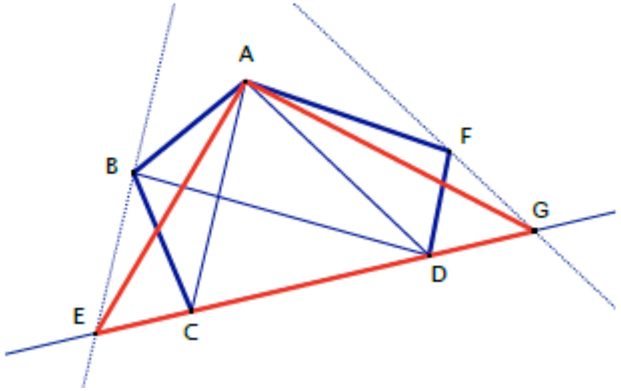
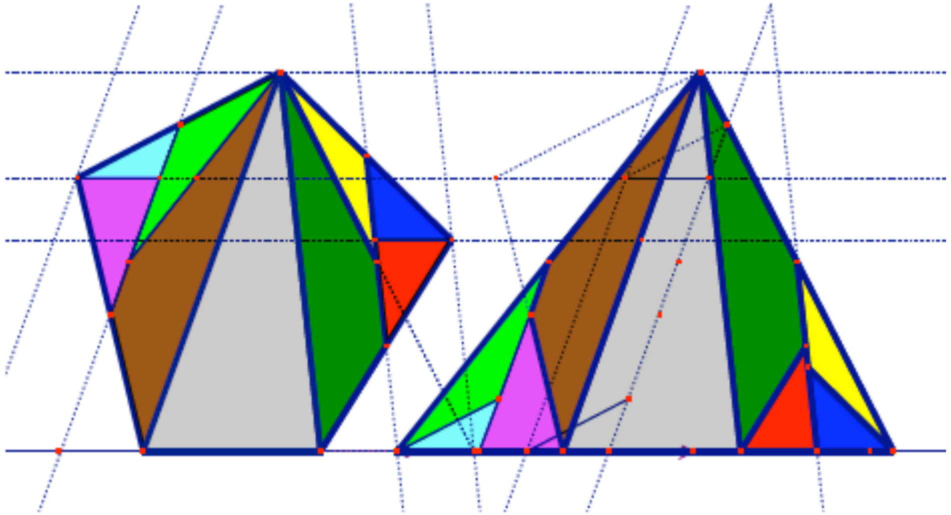


figure 19

La démonstration







La conclusion (p. 234)

2) Aus der vorstehenden Abhandlung geht hervor: daſs sich die Gleichheit der geradlinigen Figuren folgendergestalt definiren läſst:

Gleiche Figuren sind diejenigen, welche von denselben Stücken gebildet werden.

Hilbert: Fondements

FESTSCHRIFT

ZUR FEIER DER

ENTHÜLLUNG DES GAUSS-WEBER-DENKMALS

IN GÖTTINGEN.

HERAUSGEGEBEN

VON DEM FEST-COMITEE.

Geschenk des Festcomitées!

INHALT:

D. HILBERT: GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE.
E. WIECHERT: GRUNDLAGEN DER ELEKTRODYNAMIK.

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1899.

La théorie des aires

Kapitel IV.

Die Lehre von den Flächeninhalten in der Ebene.

§ 18.

Die Flächengleichheit und Inhaltsgleichheit von Polygonen.

Wir legen den Untersuchungen des gegenwärtigen Kapitels IV dieselben Axiome wie im Kapitel III zu Grunde, nämlich die ebenen Axiome sämtlicher Gruppen mit Ausnahme des Archimedischen Axioms, d. h. die Axiome I 1—2 und II—IV.

Die im Kapitel III erörterte Lehre von den Proportionen und die daselbst eingeführte Streckenrechnung setzt uns in den Stand, die Euklidische Lehre von den Flächeninhalten mittelst der genannten Axiome, d. h. *in der Ebene und unabhängig vom Archimedischen Axiom* zu begründen.

Da nach den Entwickelungen im Kapitel III die Lehre von den Proportionen wesentlich auf dem Pascalschen Satze (Satz 21) beruht, so gilt dies auch für die Lehre von den Flächeninhalten; diese Begründung der Lehre von den Flächeninhalten erscheint mir als eine der merkwürdigsten Anwendungen des Pascalschen Satzes in der Elementargeometrie.

Erklärung. Verbindet man zwei Punkte eines Polygons P durch irgend einen Streckenzug, der ganz im Inneren des Polygons verläuft, so entstehen zwei neue Polygone P_1 und P_2, deren innere Punkte alle im Inneren von P liegen; wir sagen: P zerfällt in P_1 und P_2, oder P_1 und P_2 setzen P zusammen.

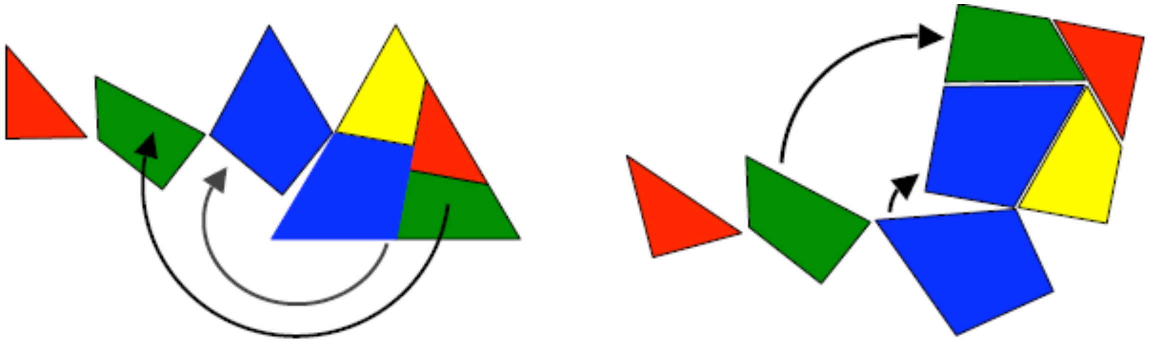
Definition. Zwei Polygone heissen *flächengleich*, wenn sie in eine endliche Anzahl von Dreiecken zerlegt werden können, die paarweise einander congruent sind.

Definition. Zwei Polygone heissen *inhaltsgleich* oder *von gleichem Inhalte*, wenn es möglich ist, zu denselben flächengleiche Polygone hinzuzufügen, so dass die beiden zusammengesetzten Polygone einander flächengleich sind.

Aus diesen Definitionen folgt sofort: durch Zusammenfügung flächengleicher Polygone entstehen wieder flächengleiche Polygone, und wenn man flächengleiche Polygone von flächengleichen Polygonen wegnimmt, so sind die übrigbleibenden Polygone inhaltsgleich.

Des puzzles

Jean-Pierre aimait bien les puzzles. La théorie de l'équidécomposabilité en est très riche. Voilé une quadrature du triangle équilatéral:



Un article de Jean-Pierre

L'Ouvert 117 (2008), 15 – 30:

ÉQUIDÉCOMPOSABILITÉ DES POLYGONES PLANS

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

Ce qui me reste

A Klaus, en souvenir
des nombreuses discussions
sur l'histoire des mathé-
matiques – Très amicalement

J Perre