

MathC2+ 2025

Strasbourg

Problèmes de l'activité « Fil rouge »

Solutions proposées par les élèves

Commentaires

Vous trouverez dans ce recueil les solutions des problèmes que nous avons reçues. Elles ont été rédigées par les élèves. Nous avons fait le choix de vous les présenter telles quelles, parfois incomplètes, parfois avec des expressions maladroites car nous considérons que c'est tout à fait normal que les premiers jets (et c'est comme ça qu'il faut les prendre, comme les premiers jets, vu peu de temps que vous aviez pour la rédaction) ne soient pas parfaitement et proprement rédigés. Certaines solutions sont accompagnées de commentaires (en italique) pour vous en faciliter la compréhension.

Nous n'avons pas reçu toutes les solutions, comme vous pouvez le constater. Si vous constatez qu'il manque votre solution, n'hésitez pas à nous l'envoyer.

Nous espérons que ce document sera un bon souvenir du stage pour toutes et tous.



Enoncés des problèmes

Cette année six problèmes ont été donnés. Certains ont été tirés d'ouvrages divers, d'autres sont plus ou moins des premières questions des problèmes du Tournoi Français des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens (tfjm.org, allez y faire un tour !). Chaque problème a été traité par deux groupes.

Liste des problèmes

Problème 1. On a un billard carré de côté de 1 mètre. Trouvez le nombre de trajectoires qui mènent d'un angle donné à un angle quelconque du billard et qui ont une longueur inférieure ou égale à 6 mètres.

Problème 2. On a un tas de 25 cailloux. On le divise en deux et on note sur le tableau le produit des nombres de cailloux dans les deux tas obtenus. A l'étape suivante, on divise en deux un des tas obtenus (on obtient donc trois tas) et on note au tableau le produit des nombres de cailloux des deux nouveaux tas. On continue ainsi : à chaque étape, on divise en deux un des tas existants, et on note au tableau le produit des nombres de cailloux des deux nouveaux tas. L'opération se termine jusqu'à obtenir 25 tas de 1 caillou chacun. Quelles sont les valeurs que peut prendre la somme de tous les nombres notés ?

Problème 3. Un surfeur veut passer ses vacances sur une île en forme de triangle équilatéral. Comme il veut pouvoir surfer sur les trois plages de l'île, il veut poser sa tente à l'endroit d'où la somme des distances aux côtes est la plus faible possible.

Pouvez-vous l'aider à trouver l'emplacement idéal ?

Question bonus : que se passe-t-il si le triangle n'est pas équilatéral ?

Problème 4. Soient m et n des entiers strictement positifs. On souhaite découper une planche sur laquelle est tracée une grille rectangulaire de dimensions $m \times n$. Cette opération se fait en plusieurs étapes, qu'on nomme coupes, qui doivent respecter les contraintes suivantes :

- On coupe sur les lignes de la grille.
- On coupe en ligne droite d'un bord à l'autre.
- Une fois que la planche est séparée en plusieurs pièces, on ne peut couper qu'une pièce à la fois.

Pour quelles valeurs de m et de n peut-on trouver une partition de la planche en dominos (c'est-à-dire des rectangles de dimensions 2×1 et 1×2) qu'il est impossible d'obtenir avec des telles coupes ?

Problème 5. On découpe un carré en des triangles acutangles (c.à.d. tels que tous les angles sont aigus). Quel est le nombre minimal de triangles qu'on peut obtenir ?

Problème 6.

Trois pirates ont dérobé une cassette remplie de louis d'or. Comme il fait nuit, ils conviennent ensemble d'attendre le lendemain matin pour se partager le butin. Néanmoins, n'ayant aucune confiance en les deux autres pirates, l'un des pirates se lève sans bruit durant la nuit, ouvre la cassette, jette à la mer un louis d'or pour honorer Sainte Lucile, patronne des Pirates, et compte les pièces restantes. Il se trouve qu'il peut partager le reste en trois parties égales. Il empoche sa part et remet les deux autres dans la cassette. Les deux autres pirates reproduisent tour à tour le même scénario ; à chaque fois le reste se partage en trois parts égales. Au lever du jour, nos trois compères ouvrent ensemble la fabuleuse cassette, offrent un louis d'or à Sainte Lucile et se partagent le butin restant en trois parts égales. Quel est le nombre minimum de louis d'or contenus initialement dans la cassette ?

Question bonus : et s'il y avait n pirates ?

Répartition des problèmes

Problème	1	2	3	4	5	6
Groupes	1 et 6	1 et 2	2 et 3	3 et 4	4 et 5	5 et 6

Problème 1 :

On a un billard carré de côté de 1 mètre. Trouvez le nombre de trajectoires qui mènent d'un angle donné à un angle quelconque du billard et qui ont une longueur inférieure ou égale à 6 mètres.

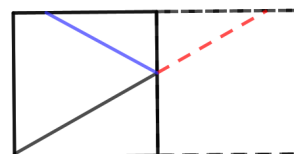
Commentaire préalable : le contexte du billard (que l'on suppose idéal) apporte deux renseignements importants. Le premier est qu'une boule se comporte comme un rayon de lumière : au point de rebond, la trajectoire de rebond est symétrique par rapport à la droite perpendiculaire au bord. Le deuxième est qu'aucun rebond n'est possible aux coins : arrivée au coin du billard, la boule tombe dans un trou. Il s'agit, bien entendu, d'un modèle mathématique, et on suppose que la boule est un point...

Solution du groupe 6

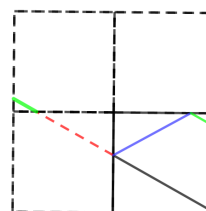
Le groupe a uniquement transmis les figures.

L'idée principale de cette solution est la suivante. La trajectoire d'une boule de billard se comportant comme un rayon de lumière, on peut le « déplier » :

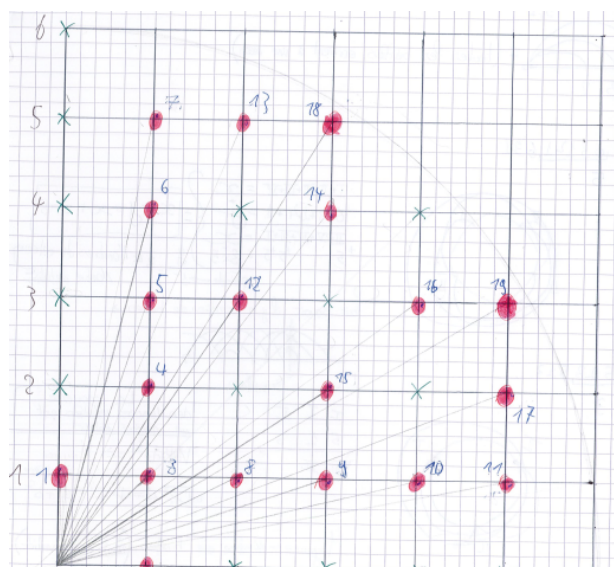
- Sur ce dessin le carré en pointillés est le symétrique du billard par rapport au bord sur lequel la boule rébondit. Les segments rouge et bleu étant symétriques sont de même longueur. Donc on a un segment qui à la même longueur que le trajectoire avec un rebond.

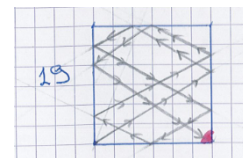
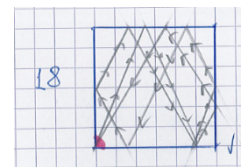
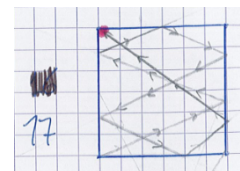
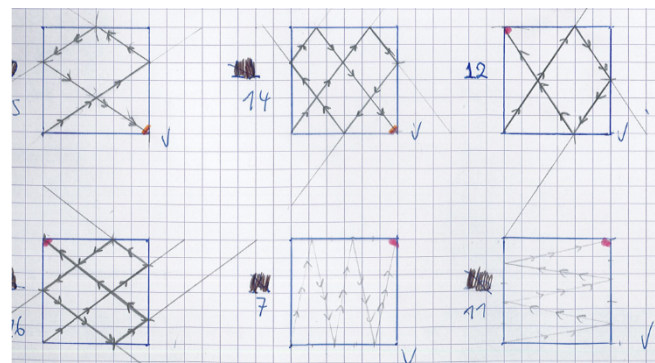
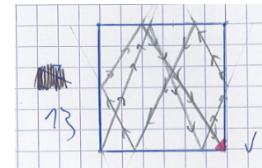
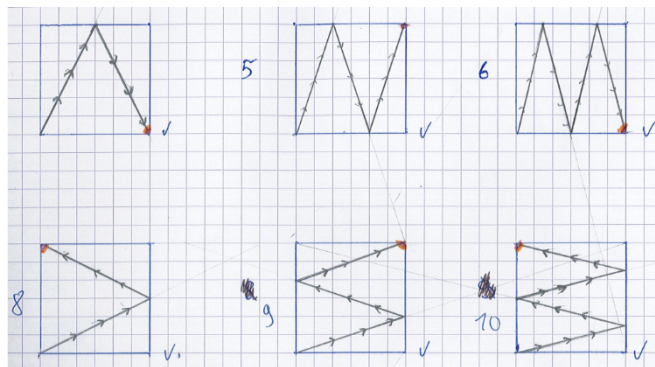
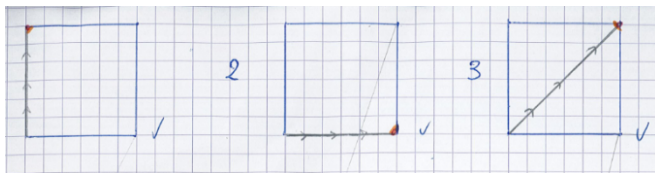


- De même, voici la trajectoire « dépliée » après deux rebonds :



- Ce qui donne le réseau ci-contre proposé par le groupe 6 dans lequel il suffit de trouver tous les segments de longueur plus petite que 6 dont les extrémités se trouvent dans les nœuds du quadrillage et qui ne contiennent aucun autre nœud. Chaque nœud du réseau représente un coin du billard, donc si la boule arrive à ce point, elle ne peut pas continuer. L'équipe a numéroté ces segments et a représenté les trajectoires correspondantes que vous trouverez ci-dessous.





Problème 2 :

On a un tas de 25 cailloux. On le divise en deux et on note sur le tableau le produit des nombres de cailloux dans les deux tas obtenus. A l'étape suivante, on divise en deux un des tas obtenus (on obtient donc trois tas) et on note au tableau le produit des nombres de cailloux des deux nouveaux tas. On continue ainsi : à chaque étape, on divise en deux un des tas existants, et on note au tableau le produit des nombres de cailloux des deux nouveaux tas. L'opération se termine jusqu'à obtenir 25 tas de 1 caillou chacun. Quelles sont les valeurs que peut prendre la somme de tous les nombres notés ?

Solution du groupe 2

Pour commencer, je teste deux possibilités avec 25 cailloux. La première, je la fait avec des tas les plus équilibrés possible et le deuxième avec deux tas les plus déséquilibrés possibles.

On a trouvé 300 pour les deux (300 est la somme des produits). On suppose alors que 300 est le seul résultat possible.

Ensuite on a testé pour 1 caillou, 2, 3, 4 et 5

$$\begin{array}{l} 1) \quad \begin{array}{l} 1 \\ 1 \times 0 = 0 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 1 \\ 1 \times 0 = 0 \end{array}} \right\} 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2) \quad \begin{array}{l} 2 \\ 1 \times 1 = 1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2 \\ 1 \times 1 = 1 \end{array}} \right\} 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3) \quad \begin{array}{l} 3 \\ 2 \times 1 = 2 \\ 1 \times 1 = 1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 3 \\ 2 \times 1 = 2 \\ 1 \times 1 = 1 \end{array}} \right\} 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4) \quad \begin{array}{l} 4 \\ 3 \times 1 = 3 \\ 1 \times 1 = 1 \\ 1 \times 1 = 1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 4 \\ 3 \times 1 = 3 \\ 1 \times 1 = 1 \\ 1 \times 1 = 1 \end{array}} \right\} 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4) \quad \begin{array}{l} 4 \\ 1 \times 3 = 3 \\ 1 \times 2 = 2 \\ 1 \times 1 = 1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 4 \\ 1 \times 3 = 3 \\ 1 \times 2 = 2 \\ 1 \times 1 = 1 \end{array}} \right\} 6 \end{array}$$

5)

5

$$\left. \begin{array}{l} 2 \times 3 = 6 \\ 1 \times 1 \ 3 = 1 \\ 1 \ 1 \ 2 \times 1 = 2 \\ 1 \ 1 \ 1 \times 1 \ 1 = 1 \end{array} \right\} 10$$

5

$$\left. \begin{array}{l} 4 \times 4 = 4 \\ 1 \ 2 \times 2 = 4 \\ 1 \ 1 \times 1 \ 2 = 1 \\ 1 \ 1 \ 1 \times 1 = 1 \end{array} \right\} 10$$

5

$$\left. \begin{array}{l} 1 \times 4 = 4 \\ 1 \ 1 \times 3 = 3 \\ 1 \ 1 \ 2 \times 1 = 2 \\ 1 \ 1 \ 1 \times 1 \ 1 = 1 \end{array} \right\} 10$$

On remarque alors que pour un nombre de cailloux donné (exemple : 5) le résultat de sa somme produit est égal à la somme de tous les chiffres inférieurs (1+2+3).

D'autre part, on a réussi à trouver une formule de nos exemples qui calcule le résultat : $\frac{n(n-1)}{2}$.

D'après ce constat, on va utiliser la relation de Gauss

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_{m+1} = S_a + S_b + S_{ab} = \frac{a(a-1)}{2} + \frac{b(b-1)}{2} + ab$$

$$= \frac{a(a-1) + b(b-1) + 2ab}{2}$$

$$= \frac{a^2 - a + b^2 - b + 2ab}{2}$$

on sait que $a+b = m+1$

$$= \frac{(a+b)^2 - (a+b)}{2}$$

$$= \frac{(m+1)^2 - (m+1)}{2}$$

$$= \frac{(m+1)(m+1-1)}{2}$$

$$= \frac{m(m+1)}{2}$$

On a prouvé que la somme des produits à une décomposition possibles qui vaut $\frac{m(m+1)}{2}$ pour un nombre de cailloux m .

La formule $\frac{m(m-1)}{2}$ est donc la formule qui donne le résultat des sommes des produits pour un nombre de cailloux m .

$$25 \rightarrow \frac{25(25-1)}{2} = 300$$

300 est donc la seule possibilité pour 25

Je vais maintenant prouver que cette relation est aussi vraie pour $\frac{n(n-1)}{2}$ $n \in \mathbb{N}$

$$1+2+3+\dots+m-1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

J'initie la récurrence pour $n=2$

$$2-1 = \frac{2(2-1)}{2} = 1$$

Je fais ensuite l'hérédité et je suppose que la formule est vraie au rang $n-1$ et je vais montrer qu'elle est vraie au rang n donc que :

$$1+2+3+\dots+m = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\begin{aligned} 1+2+3+\dots+(n-1)+m &= \frac{n(n-1)}{2} + \frac{2m}{2} \\ &= \frac{n(n-1)+2m}{2} \\ &= \frac{n^2+m}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

~~On a prouvé que la formule $\frac{n(n-1)}{2}$ est vraie au rang $n-1$ et n et elle correspond à la relation de Gauss $1+2+3+\dots+m = \frac{n(n+1)}{2}$~~

On a prouvé que la formule $\frac{n(n-1)}{2}$ vraie au rang $n-1$ entraîne la formule au rang n

Problème 3

Un surfeur veut passer ses vacances sur une île en forme de triangle équilatéral. Comme il veut pouvoir surfer sur les trois plages de l'île, il veut poser sa tente à l'endroit d'où la somme des distances aux côtes est la plus faible possible.

Pouvez-vous l'aider à trouver l'emplacement idéal ?

Solution du groupe 3

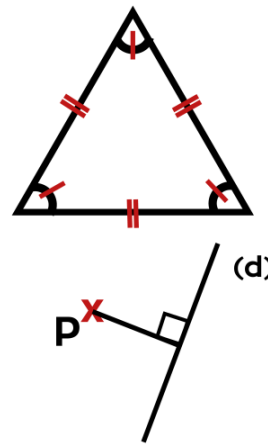
Le groupe a transmis le diaporama de sa présentation.

- Le groupe a commencé par établir des propriétés importantes pour résoudre le problème.
Remarque : la première propriété est la plus souvent utilisée comme **la définition du triangle équilatéral**. La deuxième contient la définition de distance entre un point et une droite et une propriété de cette distance.

Propriétés :

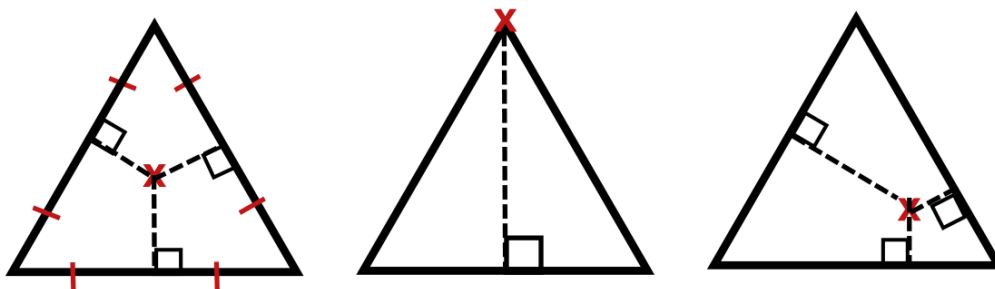
Si un triangle est équilatéral
Alors les côtés sont égaux/ de même longueur.

La distance d'un point P à une droite (d) est par définition la plus petite distance entre P et un point de la droite. Elle est égale à la distance entre P et son projeté orthogonal sur (d).

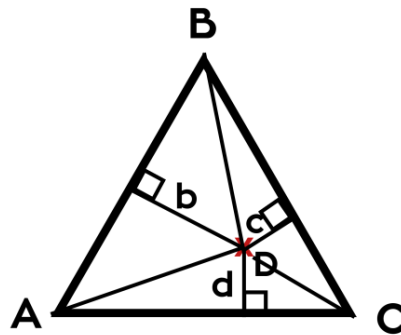
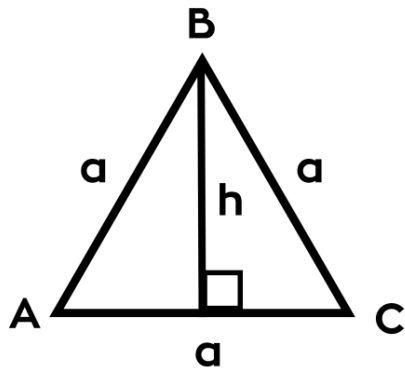


- Ensuite le groupe a étudié les différentes positions de l'emplacement de la tente sur l'île et a sans doute constaté (même si ce n'est pas écrit ici) que les sommes des distances sont égales dans les trois cas.

Recherche avec différents triangles

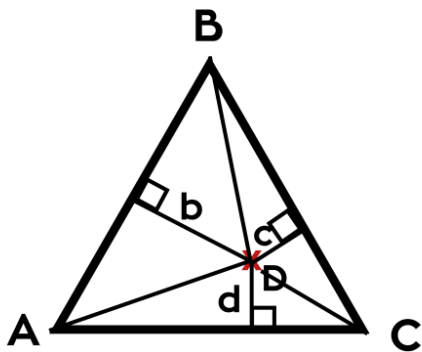


- Voici les notations utilisées pour la démonstration du résultat :



- Et voici la démonstration du résultat conjecturé : la somme des distances ne dépende pas du choix de l'emplacement. Elle est basée sur une idée assez souvent utilisée la résolution des problèmes : on exprime une même quantité (ici il s'agit de l'aire du triangle ABC) de deux façons différentes et l'égalité entre les deux expressions permet de conclure.

Problème 2 : Solution



$$A_{ABC} = A_{ADB} + A_{ADC} + A_{BDC}$$

$$\frac{ah}{2} = \frac{ab}{2} + \frac{ac}{2} + \frac{ad}{2} \quad | \cdot 2 \quad /a$$

$$h = b + c + d$$

Solution du groupe 2

I/ Après des recherches , nous avons trouvé un théorème qui implique la situation que nous avons dans ce triangle équilatéral.

II/ Le théorème de Viviani en effet stipule , que dans un triangle équilatéral A ,B , C, un point quelconque à l'intérieur de ce triangle a la somme de ses projetés orthogonaux égale à la hauteur du triangle.

III/ Pour démontrer ce théorème Viviani , découpe le triangle en 3 triangles. En effet si l'on additionne les 3 aires , nous obtenons l'aire totale du triangle.

IV/ L'aire d'un triangle est donné par la formule : $A_{\text{triangle}} = \text{base} \times \text{hauteur} / 2$.

V/ Prenons x comme coté du triangle donc l'air du triangle est égale à : $x a / 2 + x b / 2 + x c / 2$. Nous constatons que les hauteurs des triangles sont en fait également les projetés orthogonaux du point quelconque choisi précédemment.

Grace à l'équation $x h / 2 = x a / 2 + x b / 2 + x c / 2$, en multipliant par 2 on arrive à $x h = x a + x b + x c$. Puis en divisant par x , à : $h = a + b + c$

VI/ Finalement nous pouvons conclure que la somme des projetés orthogonaux d'un point quelconque sera toujours égale à la hauteur dans un triangle équilatéral.

Donc le surfeur peut placer sa tente à n'importe quel emplacement sur l'île.

Problème 4

Soient m et n des entiers strictement positifs. On souhaite découper une planche sur laquelle est tracée une grille rectangulaire de dimensions $m \times n$: Cette opération se fait en plusieurs étapes, qu'on nomme coupes, qui doivent respecter les contraintes suivantes :

- On coupe sur les lignes de la grille.
- On coupe en ligne droite d'un bord à l'autre.
- Une fois que la planche est séparée en plusieurs pièces, on ne peut couper qu'une pièce à la fois.

Pour quelles valeurs de m et de n peut-on trouver une partition de la planche en dominos (c'est-à-dire des rectangles de dimensions 2×1 et 1×2) qu'il est impossible d'obtenir avec des telles coupes ?

Remarque préalable : il est évident que la question n'a de sens que si au moins l'un des nombres m et n est pair, car sinon il n'est pas possible de partitionner le rectangle en dominos.

Les deux groupes suivent un même chemin : trouver une partition non découppable pour un rectangle 5×6 , montrer que pour tout rectangle plus grand on peut en déduire une partition non découppable et montrer que tous les rectangles plus petits sont découppables quelle que soit la partition. La principale différence entre les deux solutions concerne l'étude des cas des rectangles plus grands que 5×6 .

Solution du groupe 4

Théorèmes utiliser pour pouvoir paver un rectangle avec des dominos :

Un rectangle dont un côté est paire et pavable.

Donc on sait qu'au minimum m ou n est paire.

Recherche d'une grille « impossible à découper »

On a ensuite essayé de trouver un pavage ou on ne peut pas découper les dominos, nous somme tomber sur une grille de 5×6 (voire si dessous).



On a donc vérifié que cette grille été bien la plus petite que l'on puisse avoir. Pour cela nous avons lister toutes les autres possibilités à la grille de 5×6 :

- $n \times 1$
- $n \times 2$
- $n \times 3$
- $n \times 4$

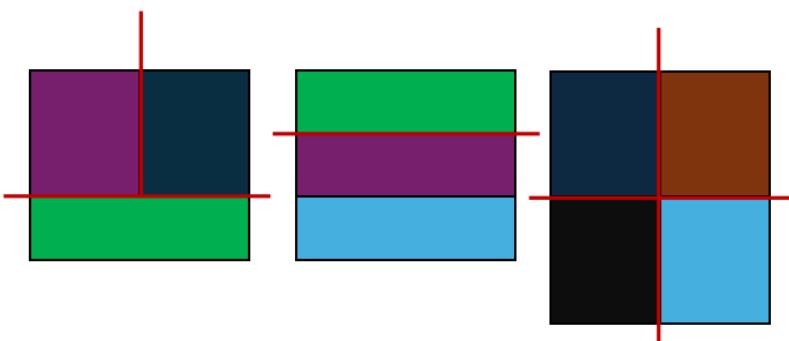
Démonstration pour les grilles inferieur à 5x6.

nx1:



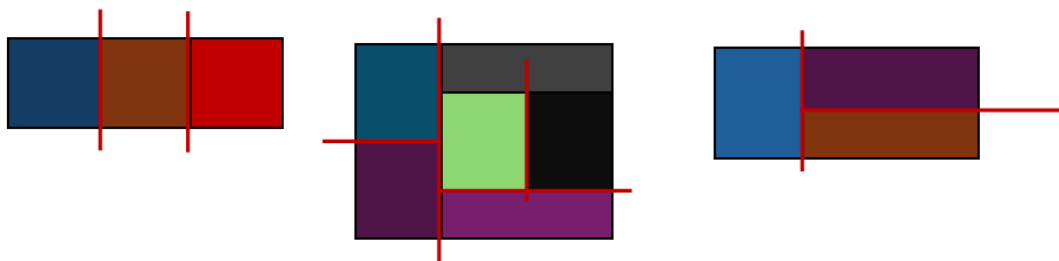
Les dominos se succéderont tous verticalement ce qui nous donne un coupe horizontal possible pour les séparer et obtenir pièces par pièces.

nx2:



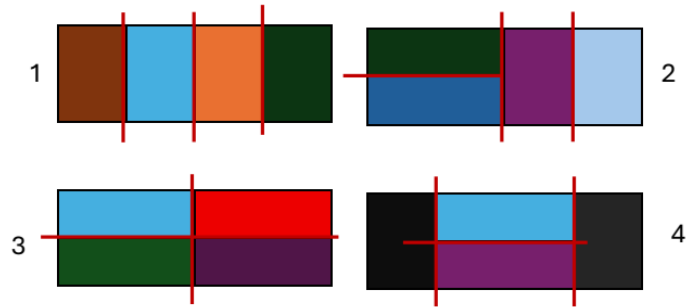
Les dominos seront soit tous à la verticale, soit tous à l'horizontal ce qui nous laisse toujours une possibilité pour les séparer et obtenir pièce par pièce.

nx3:



Les dominos seront soit tous à la verticale, soit 2 à l'horizontal et 1 à la verticale ce qui nous laisse toujours une possibilité pour les séparer et obtenir pièce par pièce.

nx4:



Les dominos seront soit :

- Tous à la verticale (1)
- 2 à l'horizontal et 2 à la verticale (2)
- Tous à la verticale (3)
- 2 à l'horizontale encadré par 2 à la vertical (4)

Ce qui nous laisse toujours une possibilité pour les séparer et obtenir pièce par pièce.

Conditions à avoir pour répondre à la question :

- n ou m doit être pairs.
- n et m doivent être des entiers strictement supérieurs à 4.
- la grille de 5x6 doit être placée dans la planche choisie.

Problème rencontré à la suite des conditions vues si dessus.

Si l'on prend une planche de 5 x 8 par exemple on se rend compte que même si la grille de 5x6 est placée on ne parvient pas à paver le rectangle. Voir si dessous



On peut voir que la grille de 5x6 est bien présente dans la planche de 5x8 or on peut voir en jaune deux cases dans les quelle on ne peut mettre un domino car il n'y a pas la place pour une pièce de 1x2 ou 2x1 car il y a déjà 2 dominos sur la colonne de 5 cases disponible : $2 + 2 + 2 = 6$ et non 5 c'est pourquoi cette configuration ne convient pas.

Légende :

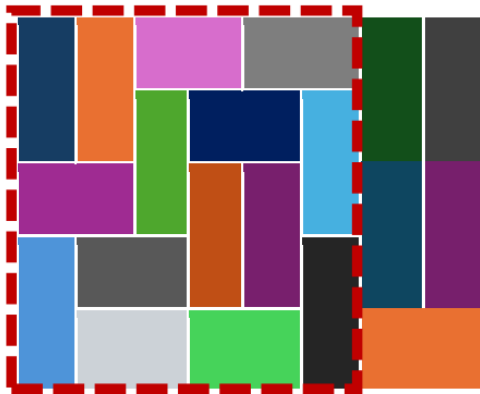


Grille de 5 x 6 imposer.



Case de 1 x1 impossible à remplir

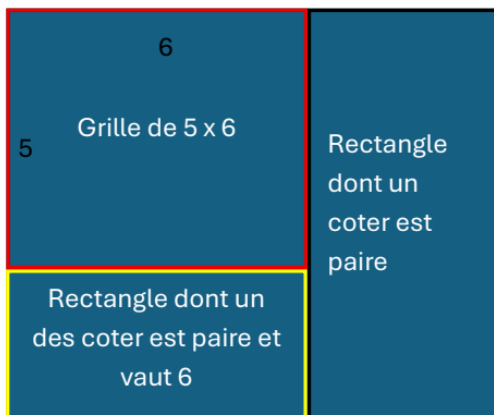
Condition supplémentaire :



Placer la grille de 5 x 6 dans le coin en haut à droite.

Dans la grille de 5 x 8 si contre on peut observer que toutes les cases sont prise par un domino.

Toute les grilles dont n et m sont des entiers strictement supérieurs à 4 et dont au moins un des deux est paire sont pavable. En effet cela reviendra à couper la planche choisie (en bleue sur le schéma) en 3 rectangle bien précis.



Le rectangle de périmètre noir et forcément de largeur ou de longueur paire car si on a une planche de 6 de largeur ce dernier n'existera pas et sinon si la largeur de la planche et impaire sa longueur sera paire obligatoirement donc la longueur du rectangle sera paire

Solution au problème :

Pour pouvoir trouver une partition de la planche en dominos qu'il est impossible d'obtenir avec les coupes donner dans l'énoncer, il faut que :

- n et m soit des entier strictement positif et supérieur a 4.
- que n ou m soit paire.
- que la grille de 5x6 soit placer dans la configuration donner dans le coin droit de la planche choisi. (Voir grille 5x6 du début)

Après avoir remplie ses conditions il sera possible pour toutes planche supérieure à celle de 5 x 6 de séparer certain domino part les coups donner dans l'énoncer mais il sera impossible de séparer tous les dominos de la planche car la grille de 5 x 6 est pas possible à couper.

Question bonus

Comme ce groupe a terminé en avance, deux questions ont été posées : étudier la longueur totale des coupes effectuées et le nombre de coupes nécessaires.

Objectif du problème

On souhaite découper un rectangle de dimensions $m \times n$, composé de $m \times n$ carreaux unitaires de 1×1 , pour obtenir tous les petits carreaux séparés les uns des autres.

Cependant, on ne peut faire qu'une seule coupe à la fois, et chaque coupe doit aller d'un bord à l'autre du rectangle (horizontalement ou verticalement).

On cherche alors à savoir :

1. Quel est le nombre de coupes (maximal ou minimal) nécessaires pour obtenir tous les petits carreaux séparés ?
2. Quelle est la longueur (maximale et minimale) totale des découpes effectuées ?

1. Nombre de coupes

Pour calculer le nombre de coups à effectuer dans un rectangle en respectant les contraintes imposées le premier nombre de coupes à réaliser serait $m-1$ (qui correspond au nombre de coupes possible dans m). Nous aurons ensuite m bande et faudra découper chacune d'elle $n-1$ fois. Donc la formule du nombre de coupes à réaliser est :

$$m - 1 + m(n - 1) = mn - 1 \text{ coupes.}$$

C'est une propriété connue en mathématiques :

"Pour obtenir k morceaux à partir d'un seul en ne pouvant couper qu'un morceau à la fois, il faut $k-1$ coupes."

Donc pour un rectangle de m lignes et n colonnes, il faut : $mn - 1$ coupes

Exemple concret :

Tu as pris le cas $m=3$, $n=4$, donc $mn=12=12$ carreaux.

Le calcul montre :

$$\text{Nombre de coupes} = 12 - 1 = 11$$

On a fait 3 coupes horizontales et 2 verticales au départ (ou l'inverse), puis on continue à découper les morceaux déjà coupés, jusqu'à obtenir les 12 carreaux.

On aboutit bien à 11 coupes au total : donc on peut en conclure que le nombre de coupes reste constant dans un rectangle donné et il n'y a pas de maximum et minimum.

2. Longueur des découpes

La longueur de découpes correspond à la somme de tous les segments intérieurs du rectangle donc sa valeur reste également constante dans un rectangle donné.

- Les coupes horizontales traversent tout le rectangle, donc ont une longueur m .
- Les coupes verticales ont une longueur n .

Et il y a :

- $n-1$ coupes verticales (chaque colonne est séparée par une coupe verticale),
- $m-1$ coupes horizontales (chaque ligne est séparée par une coupe horizontale).

Donc :

- $n-1$ coupes de longueur m
- $m-1$ coupes de longueur n

Formule finale:

$$\text{Longueur totale} = n(m - 1) + m(n - 1)$$

Exemple concret :

Tu as $m=4$, $n=3$

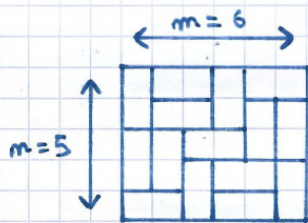
$$\text{Longueur} = 3(4 - 1) + 4(3 - 1) = 3 \times 3 + 4 \times 2 = 9 + 8 = 17$$

La longueur totale reste constante, même si on change l'ordre ou la méthode des coupes, car on doit toujours séparer toutes les lignes et toutes les colonnes.

Groupe 3: problème des dominos:

Nous souhaitons déterminer quelles sont les dimensions m et n d'une planche quadrillée où sont disposés des dominos de 1×2 , pour lesquelles il est impossible de la couper entièrement sans devoir "casser" un domino en deux. Les coupes doivent obligatoirement aller d'un bout à l'autre de la planche, en ligne droite, et en suivant le quadrillage de la grille.

Premièrement, voici les plus petites dimensions répondant à la consigne:



Il existe d'autres dispositions en 5×6 qui répondent à la consigne, mais celle-ci est la plus simple à mes yeux, car ses 3 dernières colonnes correspondent aux 3 premières renversées verticalement.

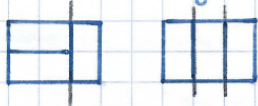
Voici pourquoi il est impossible de trouver des valeurs inférieures pour m et n :

- Premièrement, toutes les valeurs où m et n sont tous deux impairs sont exclues: leurs produits, donc l'aire de la planche, seront impairs. Il sera par conséquent impossible de remplir la grille de dominos de 1×2 , ayant une aire paire.

- Planches de $2 \times m$:

↳ 2×3 : peu importe la disposition, il y aura une ligne de coupe

(ici du crayon):



↳ 2×4 : minimum 2 lignes de coupes:



↳ 2×5 : identique au 2×4 mais avec 1 domino vertical en plus

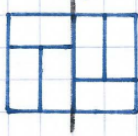
- Planches de $3 \times n$:

↳ 3×2 : identique au 2×3

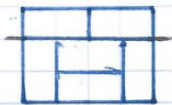
↳ 3×3 : impossible car aire impaire

↳ 3×4 : deux possibilités

↳ disposition en 2×3 juxtaposées:

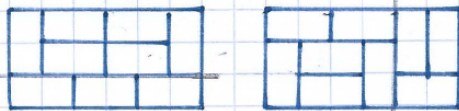


↳ disposition en 2×4 plus une ligne décomposable:



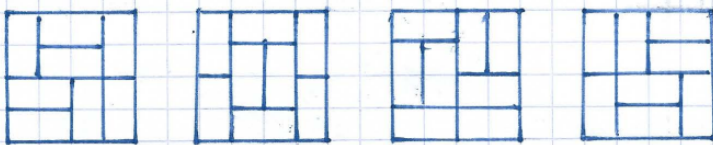
↳ 3×5 : impossible car aire impaire

↳ 3×6 : soit ^{une} disposition en 2×6 plus une ligne décomposable, soit une disposition en 3×4 juxtaposée à une en 3×2 : il y a forcément une ligne de coupe qui permet de tout séparer.



Pour la suite, observons le cas des planches pair-pair dans le but d'établir des règles communes / des "théorèmes":

- Planches de 4×4 :



Nous pouvons établir 2 constats:

- Premièrement, si une ligne, horizontale ou verticale, ne coupe aucun domino, alors c'est une ligne de coupe, ce que nous ne voulons pas.

- En dimensions paires, une ligne ne peut pas couper qu'un seul domino: cela signifierait qu'il n'y en a qu'un "debout" et le reste "couché". Sachant qu'un domino debout a une largeur de 1 et un domino couché une de 2, alors une ligne qui ne coupe qu'un domino aura une largeur ou une

hauteur (selon le sens de cette ligne) égale à : $1+2x$; ce qui donne un nombre impair.

Avec cela, nous pouvons établir un théorème :

- Une dimension est paire, si et seulement si elle possède un nombre pair de dominos lui étant perpendiculaire. La contraposée existe également.

Mais nous pouvons donc poursuivre plus efficacement avec ce théorème :

- Branches de $4 \times n$:

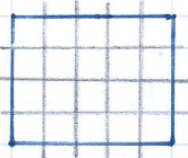
↳ tout $n < 4$: prouvé précédemment

↳ 4×4 : Il y a 3 lignes de coupe horizontale et 3 verticale à bloquer. Elles ont toutes une longueur paire, il faut donc 2 dominos perpendiculaire sur chaque ligne pour respecter notre théorème.

$2 \cdot (3 \times 2) = 12$ dominos différents nécessaires. Cependant, le carré a une aire de : $4^2 = 16$; ce qui signifie qu'il y a la place pour seulement $\frac{16}{2} = 8$ dominos.

$12 > 8$; il est donc impossible de trouver une disposition non décomposable.

↳ 4×5 : Dominos disponibles : $\frac{4 \times 5}{2} = 10$



Dominos nécessaires : 3 lignes horizontales impaires
4 lignes verticales paires

Total nécessaires : $3(1) + 4(2) = 3 + 8 = 11$

$11 > 10$; donc impossible

↳ 4×6 : Dominos disponibles : $\frac{4 \times 6}{2} = 12$

Dominos nécessaires : $3 \times 2 + 5 \times 2 = 16$

$16 > 12$; donc impossible

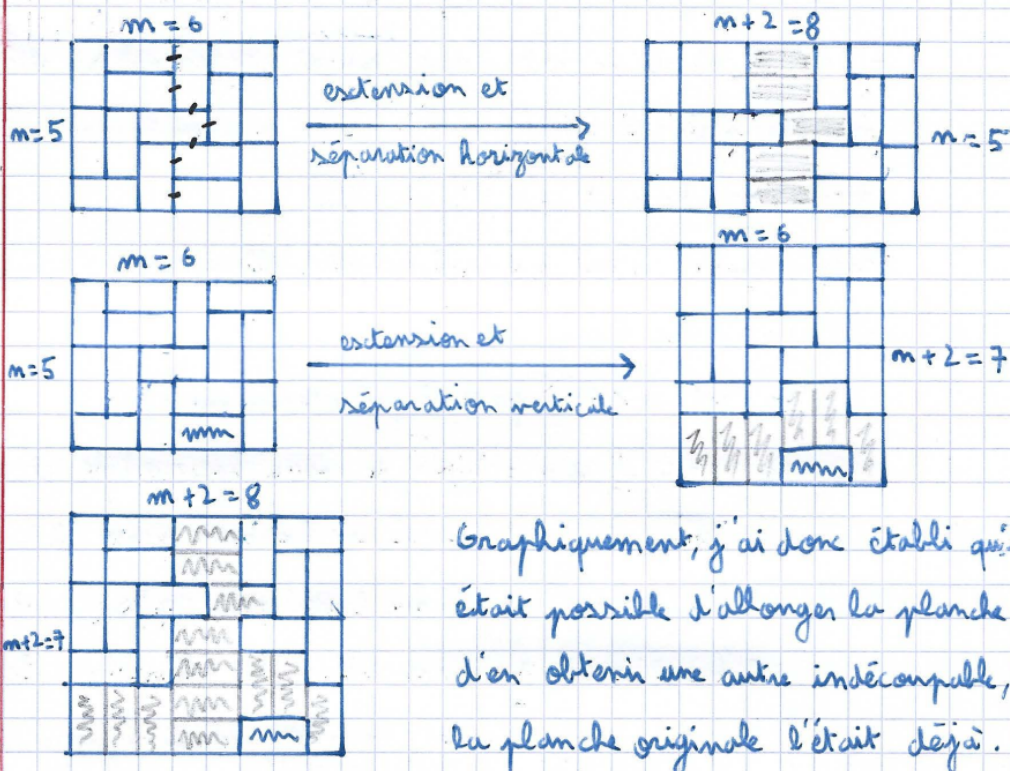
↳ 4×7 : Dominos disponibles : $\frac{4 \times 7}{2} = 14$

Dominos nécessaires : $3 \times 1 + 6 \times 2 = 15$

$15 > 14$; donc impossible

Pour pouvons de couvrir tous les cas on descend de 5 par 6.

À partir de cette dernière disposition, il est possible d'obtenir n'importe quel rectangle de dimensions pair-impair;

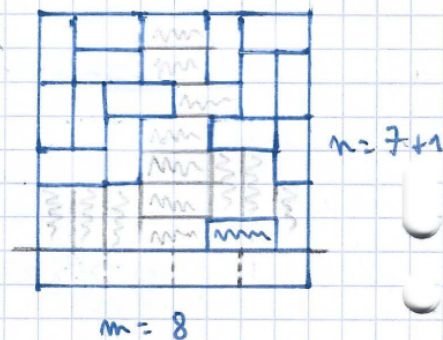


Graphiquement, j'ai donc établi qu'il était possible d'allonger la planche afin d'en obtenir une autre indécomposable, tant que la planche originale l'était déjà.

Pour pouvons établir le théorème suivant:

Si la planche $m \times n$ est une solution indécomposable, alors la planche $(m+2x) \times (n+2y)$ l'est également (avec $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$ et x et y pouvant être nuls). Avec ce théorème, nous pouvons partir de m et n ($5; 6$) ou $(6; 5)$ et créer une planche pair-impair totalement indécomposable. Pour avoir une planche pair-pair, elle sera forcément coupable une seule fois: il suffit de suivre ce même théorème; puis de faire $+1$ à la valeur impaire afin d'ajouter une ligne / colonne, qu'on coupera afin d'obtenir une planche non décomposable.

- Baptiste LECIGNE



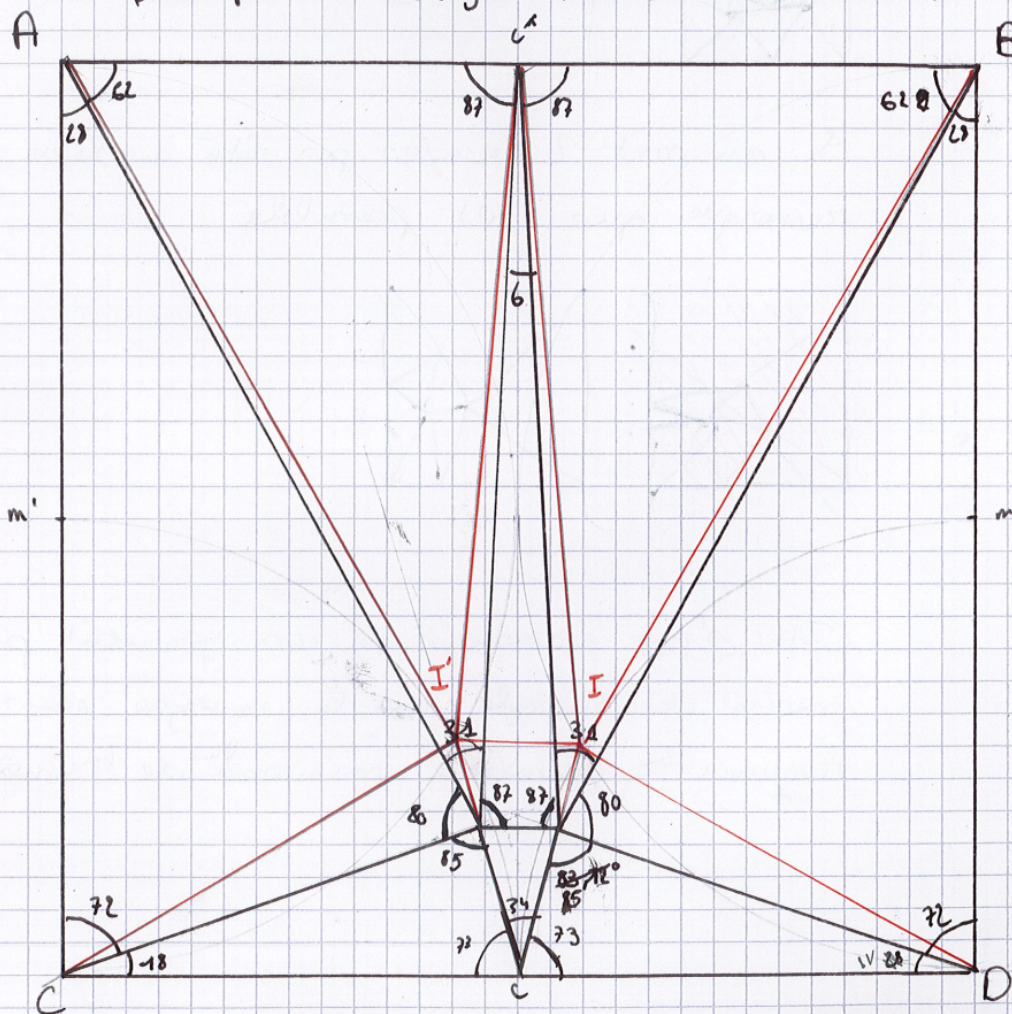
Problème 5

On découpe un carré en des triangles acutangles (c.à.d. tels que tous les angles sont aigus). Quel est le nombre minimal de triangles qu'on peut obtenir ?

Solution du groupe 4

Condition

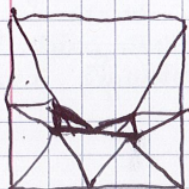
- tout les angle a 90° doivent etre couper en 2 min
- tout les angle a 180° doivent etre couper en 3 min
- Quand on met un polygone dans un carre on obtient alors une situation où il ya une infinite de triangle
- ↳ Donc on utilise des cercle de centre m' et m
 m' = milieu de $[AC]$ / m : milieu de $[DB]$
 et également 2 autre cercle de centre A et B ou C et D est de rayon $[Am']$
- ↳ le point d'intersection des 2 cercle si on les relie a crée 2 point I et I' or si on relie ~~le point~~ I a B et D cela donne un triangle non acutangle il est rectangle en I pareil pour le triangle AIC



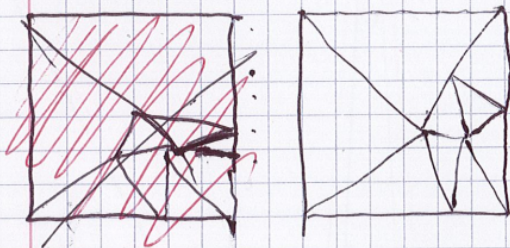
- il faut donc legerement deplace les point I et I' vers le coté le + proche et reduire le segment $[I, I']$ de longueur alors les angle AIC et BIC sont aigus

On est parti du principe qu'en peut mettre 12 triangles car 3 par côté donc $3 \times 4 = 12$.

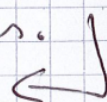
Si ~~on~~ on met 1 triangle par côté au lieu de 3, on se retrouve avec 2 triangle supplémentaire;



Si on met 2 triangles par côté au lieu de 3, on remarque que c'est possible



On s'est demandé si on pouvait pas mettre moins de triangle car la consigne nous demande de trouver le nombre minimal de triangles.



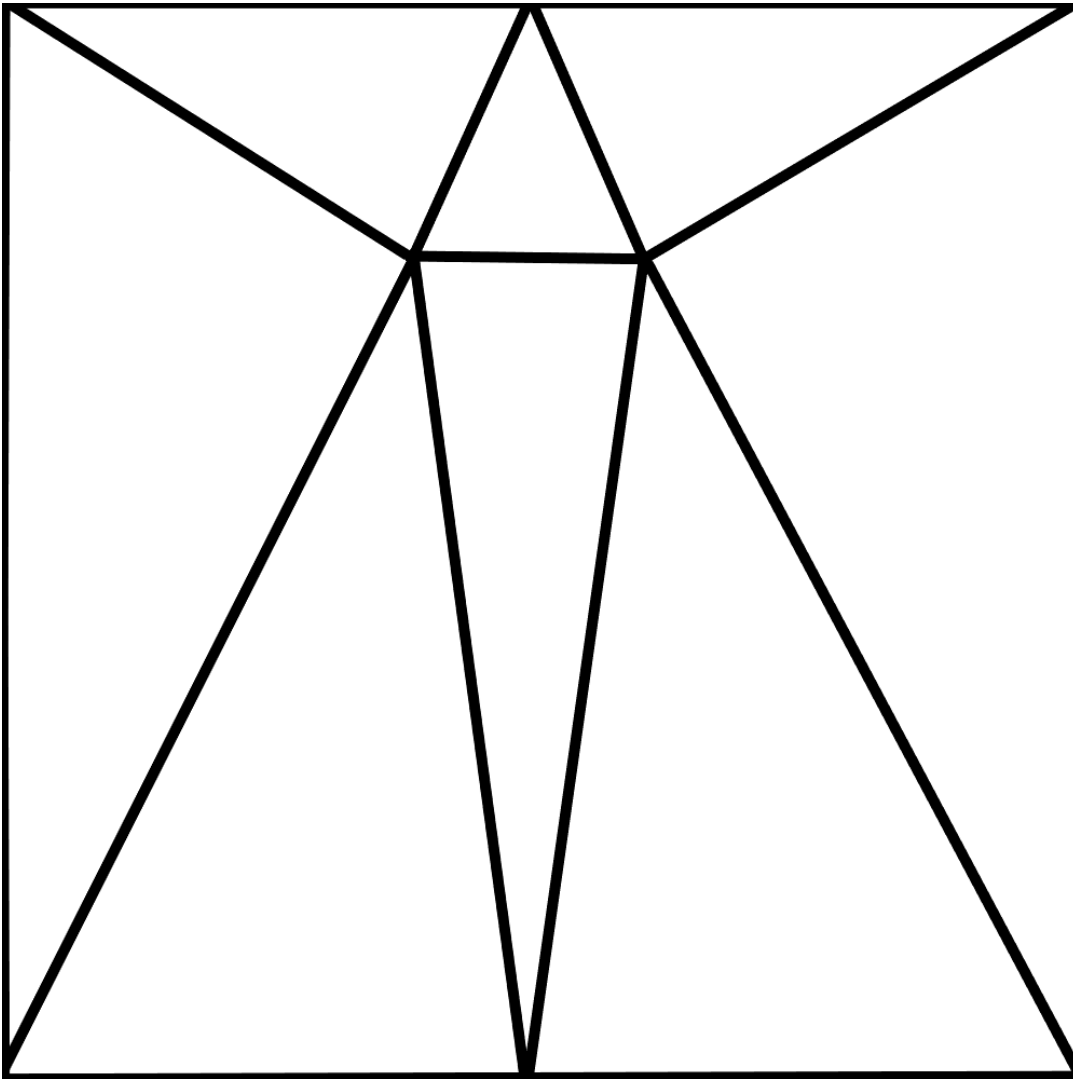
~~Cette figure est~~ Cette figure ^{est} le nombre minimal de triangle acutangle car on ne peut pas ~~mettre~~ enlever un triangle sur l'un des côtés car un angle de 180° doit obligatoirement être coupé en 3 ou pas du tout.

Solution du groupe 5

En premier voici les règles que nous avons établies:

- 1) Les coins du carré doivent être coupés pour éviter les angles droits
- 2) Les angles plats coupés par une droite forment un angle obtus et un aigu, donc pour éviter cela ils doivent être coupés par au moins deux droites en un même point
- 3) Les points dans le carré doivent être le sommet d'au minimum 5 triangles car $360^\circ/4=90$ donc on doit prendre un au-dessus: 5
- 4) Il doit y avoir au minimum 2 points dans le carré car c'est impossible d'y arriver avec un seul. Si il y en a qu'un, les diagonales du carré devraient se couper suivant la règle 1 et des angles droits ou obtus seraient formés

Et en dernier voici notre figure:

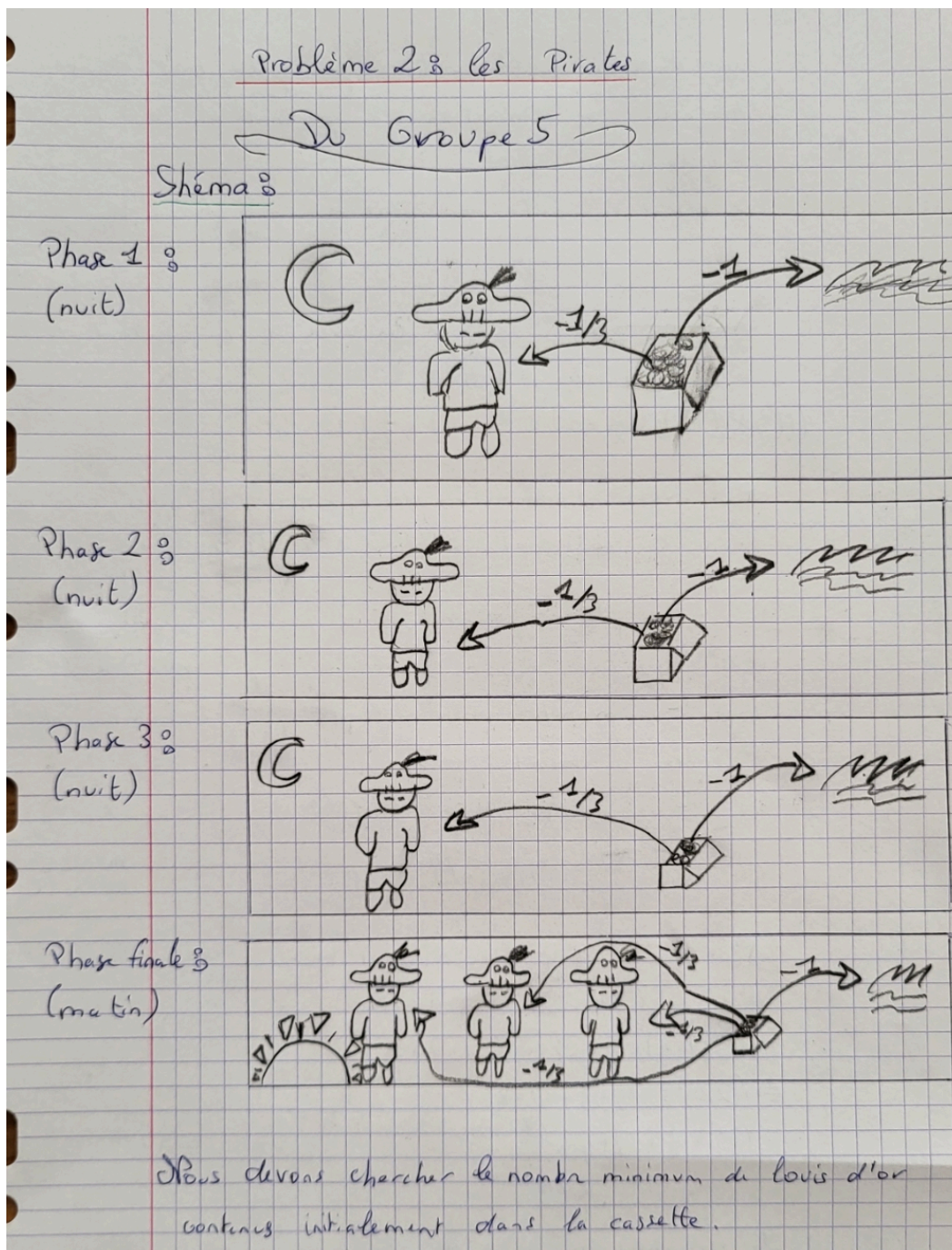


Problème 6

Trois pirates ont dérobé une cassette remplie de louis d'or. Comme il fait nuit, ils conviennent ensemble d'attendre le lendemain matin pour se partager le butin. Néanmoins, n'ayant aucune confiance en les deux autres pirates, l'un des pirates se lève sans bruit durant la nuit, ouvre la cassette, jette à la mer un louis d'or pour honorer Sainte Lucile, patronne des Pirates, et compte les pièces restantes. Il se trouve qu'il peut partager le reste en trois parties égales. Il empoche sa part et remet les deux autres dans la cassette. Les deux autres pirates reproduisent tour à tour le même scénario ; à chaque fois le reste se partage en trois parts égales. Au lever du jour, nos trois compères ouvrent ensemble la fabuleuse cassette, offrent un louis d'or à Sainte Lucile et se partagent le butin restant en trois parts égales. Quel est le nombre minimum de louis d'or contenus initialement dans la cassette ?

Question bonus : et s'il y avait n pirates ?

Solution du groupe 5



Pour répondre à la question principale, nous avons procédé par élimination en partant de la fin de l'histoire au début.

x étant le nombre de pièces reçu à chacun des pirates lors du partage finale.

~~Nous avons~~ Voici la formule avec x en partant de la fin au début de l'histoire :

$$(((3x+1) \times \frac{3}{2} + 1) \times \frac{3}{2} + 1) \times \frac{3}{2} + 1$$

Nous avons d'abord remplacé x par 1 mais cela nous donne un ~~chiffre~~ nombre à décimal : $11,5 \times \frac{3}{2} + 1$

Pour aller plus rapidement, nous avons remarqué que tous les nombres pairs ne fonctionnaient pas ~~car~~ cause de cette règle : un nombre pair multiplié par un nombre entier donnera un nombre pair

- un nombre pair $+ 1$ donnera un nombre impair

- un nombre impair divisé par 2 donnera un nombre décimal

Nous avons essayé avec d'autres nombres mais 7 étant le plus petit nombre qui fonctionne :

$$(((3 \times 7 + 1) \times \frac{3}{2} + 1) \times \frac{3}{2} + 1) \times \frac{3}{2} + 1$$

$$\Rightarrow ((22 \times \frac{3}{2} + 1) \times \frac{3}{2} + 1) \times \frac{3}{2} + 1$$

$$\Rightarrow (34 \times \frac{3}{2} + 1) \times \frac{3}{2} + 1$$

$$\Rightarrow 52 \times \frac{3}{2} + 1 = 79$$

Le nombre minimum de louis d'or contenus initialement dans la cassette est de 79 louis d'or.

