MathC2+ 2024

Strasbourg

Problèmes de l'activité « Fil rouge »

Solutions proposées par les élèves

Commentaires

Vous trouverez dans ce recueil les solutions des problèmes que nous avons reçues. Elles ont été rédigées par les élèves. Nous avons fait le choix de les publier telles quelles, sans reprendre les formulations parfois imparfaites, propres à une première rédaction.

IREM STRASBOURG

Problème 1 : les 44 moineaux

Autour d'un étang sont plantés 44 arbres. Sur chacun des arbres il y a au départ exactement un moineau. De temps en temps deux moineaux changent simultanément leurs positions : un moineau se déplace sur l'arbre voisin dans le sens des aiguilles d'une montre et l'autre se déplace sur l'arbre voisin dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Les moineaux peuvent-ils se retrouver tous sur un même arbre ?

Même question s'il y a n *arbres et n moineaux (*n *étant un nombre entier naturel quelconque).*

Solution du groupe 1

Voir pages suivantes (2-3)

Solution du groupe 7

Pour commencer ce problème, on commencera par numéroter tous les arbres de 1 à 44. On note S_n la somme somme pondérée à l'instant n . On remarque assez rapidement que S_n est conservée à plus ou moins $44j$, $j \in Z$.
$S_0 = 1 + 2 + ... + 43 + 44 = 990$
$S_{finale} = 44k$, k l'arbre sur lequel se retrouvent les moineaux
Par l'absurde,
Supposons qu'il existe un entier k tel que
$990 + 44j = 44k$
Donc $990 = 44(k - j)$
$k - j \in Z$ cela veut dire que 44 est un diviseur de 990, c'est absurde ! Il n'existe donc aucun entier k suivant cette propriété. Les moineaux ne pourront donc pas tous se retrouver sur un arbre.
Prenons le cas pour n arbres,
$S_0 = S_{finale}$
$\frac{n(n+1)}{2} + jn = nk$
Donc $\frac{n+1}{2} = k - j$
On rappelle que $k - j \in Z$, vérifions donc $\frac{n+1}{2} \in Z$ également. Pour $n = 2i + 1$, on a,
$\frac{2i+2}{2} = \frac{2(i+1)}{2} = i + 1$
$i + 1 \in Z$ l'égalité est vraie pour n impair et les moineaux peuvent se retrouver sur un arbre.
Pour $n = 2i$, on a,
$\frac{2i+1}{2}$
Or $2i + 1$ est impair est n'est pas divisible par 2,
Par conséquent, $\frac{2i+1}{2} \notin Z$, l'égalité n'est pas vraie pour n pair et les moineaux ne peuvent se retrouver sur un même arbre.

Commentaires :

- La notation « $a \equiv b \mod c$ » (utilisée par le groupe 1), où a et b sont des nombres entiers, signifie que $a - b$ est divisible par c. Ou, autrement dit, que a et b ont le même reste de la division euclidienne par c.
- Une partie importante des deux solutions repose sur le fait que $\frac{n(n-1)}{2}$ est divisible par n si et seulement si n est impair. Ce qui doit être justifié, même si la justification est simple : d'une part, si n est impair, $n - 1$ est pair donc $\frac{n-1}{2}$ est entier et $\frac{n(n-1)}{2}$ est divisible par n, d'autre part $n - 1$ et n n'ont pas de diviseurs communs, et donc si n est pair $\frac{n(n-1)}{2}$ aura « un 2 de moins » dans sa décomposition en produit de facteurs premiers.
- La méthode utilisée ici s'appelle « recherche d'invariant », elle s'utilise assez souvent pour la résolution des problèmes lorsqu'un objet ou une situation est modifiée et que l'on veut montrer qu'il n'est pas possible d'obtenir tel ou tel résultat. La méthode consiste en la recherche d'un élément de la situation qui ne change pas lors des modifications (c'est ce qu'on appelle invariant) et on compare cette valeur pour les situations de départ et d'arrivée. Ici l'invariant est le reste de la division par le nombre d'arbres de la somme des numéros des places des moineaux.

Solution du groupe 1

Problème des moineaux sur un arbre

21/06/2024

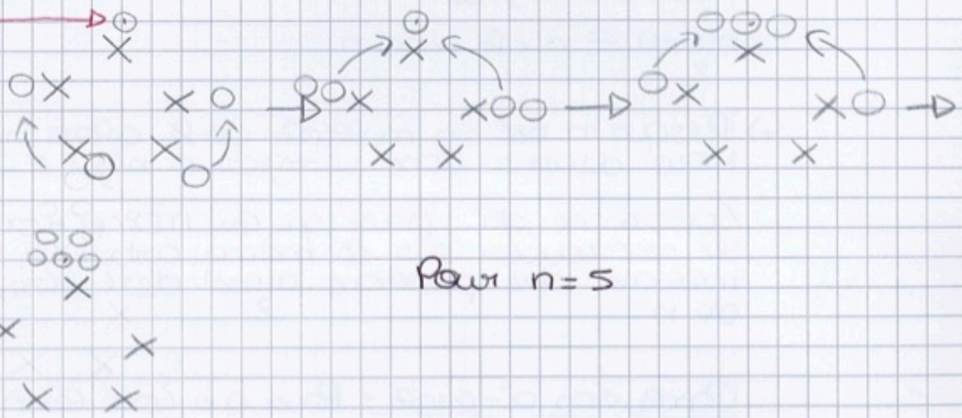
Sujet 1 : Problème 1

Pour n impair :

Pour n impair, nous allons choisir un moineau que l'on fige, et qui va attendre que tous les autres moineaux viennent à lui, car il y aura le même nombre de moineau à sa droite et à sa gauche, jusqu'entre les 2 arbres diamétralement opposé à lui.

Schémas : x = arbres   O = moineaux

on va figer ce moineau



Pour n = 5

Donc : $\forall 2n+1$ (pour tout n impair), tous les moineaux peuvent se retrouver sur le même arbre car les moineaux viendront progressivement vers l'arbre où se trouve le moineau figé.

Pour n pair:

1) Nous allons numéroter les arbres de 0 à n-1 : (0 ; 1 ; 2 ; ... ; n-1).
Puis calculer la somme initial des positions des moineaux :

$$S_{initial} = 0+1+2+\dots+(n-1) = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$$

2) Chaque fois que deux moineaux se déplacent, un moineau à la position i se déplace à la position (i+1) mod n, et un autre à la position (j-1) mod n.

3) Si tous les moineaux se retrouvent sur l'arbre k, la somme des positions

$$S_{final} = k+k+k+\dots+k \ (n \text{ fois}) = n \times k$$

Pour que cela soit possible, il faut que :

$$S_{initial} \equiv S_{final} \mod n$$

$$\frac{n(n-1)}{2} \equiv n \times k \mod n$$

4) Puisque k×n est un multiple de n alors $n \times k \equiv 0 \mod n$.
Nous devons donc vérifier si $\frac{n(n-1)}{2} \equiv 0 \mod n$.

Autrement dit, pour que les moineaux puissent se retrouver sur le même arbre k, la somme initiale des positions $\frac{n(n-1)}{2}$ doit être un multiple de n.

Conclusion générale : Pour que tous les moineaux puissent se mettre sur le même arbre k, la condition suffisante est que : $\frac{n(n-1)}{2} \equiv 0 \mod n$.

Réponses aux questions initiales :

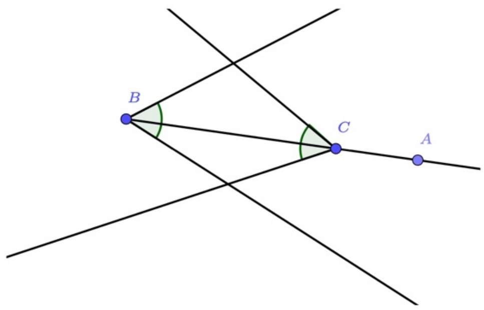
1) Quand il y a n = 44, les moineaux ne peuvent pas se retrouver sur le même arbre car $\frac{44(44-1)}{2} \not\equiv 0 \mod n \rightarrow \frac{44 \times 43}{2} = 946$ et 946 n'est pas un multiple de 44.

2) Lorsque n est pair, alors les moineaux ne peuvent pas se retrouver sur le même arbre car la condition générale n'est pas respectée.

Lorsque n est impair, alors les moineaux peuvent se retrouver sur le même arbre car la condition générale est respectée.

Problème 2 : les caméras

On a n *caméras de surveillance identiques, dont l'angle de surveillance est* θ*. On veut les placer en* n *points distincts* $A_1, \ldots, A_n$ *du plan pour pouvoir surveiller le plan entier. On suppose que les caméras sont transparentes, c'est-à-dire qu'un point est surveillé par une caméra, même si une autre caméra se trouve entre les deux (voir le dessin : le point* A *est surveillé par la caméra placée en* B *mais pas par celle placée en* C*.)*



Trouver toutes les valeurs de $\theta \in [0;\pi]$ *(en fonction de* n*) pour lesquelles on peut le faire (en orientant les caméras comme on veut) dans deux cas suivants :*

1. Les points $A_1, \ldots, A_n$ *sont les sommets d'un polygone régulier*

2. $n = 2,3,4$ *ou 5 et les points* $A_1, \ldots, A_n$ *sont alignés.*

Solution du groupe 1

Voir pages suivantes (5-6-7)

Commentaires :

- L'idée générale de la preuve est de placer d'abord les caméras dans un même point, trouver l'angle minimal pour que tout le plan soit surveillé, puis déplacer les caméras de sorte que chacune surveille au moins ce qu'elle surveillait au départ pour obtenir la configuration souhaitée.
- Cette méthode de résolution porte le nom de « abandon de contrainte » : pour construire quelque chose qui vérifie plusieurs conditions, on abandonne dans un premier temps une de ces conditions (contrainte), on construit l'objet sans en tenir compte puis on modifie l'objet obtenu pour récupérer la contrainte abandonnée.

Solution du groupe 1

Problème n°2 : Les caméras de surveillance :   Groupe 1

Cas n°2 : Dans le dernier cas, dans chaque situation, il faut que la somme des angles ~~[illegible]~~ soient supérieur ou égale à 360° pour pouvoir couvrir tout le plan.

Nous faisons donc la division : $\Theta = \frac{360}{n}$ "n" étant le nombre de caméra

donc : $n = 2$ $\frac{360}{2} = 180°$

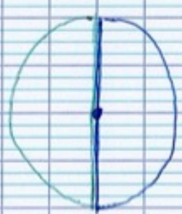
$n = 3$ $\frac{360}{3} = 120°$

$n = 4$ $\frac{360}{4} = 90°$

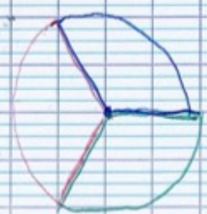
$n = 5$ $\frac{360}{5} = 72°$

donc pour chaque cas, si tous les points étaient au même endroit :

$n = 2$ $\Theta = 180°$

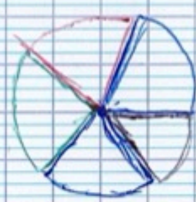


$n = 3$. $\Theta = 120°$



$n = 4$ $\Theta = 90°$

$n = 4$: $\Theta = 72°$



(schéma à main levé)

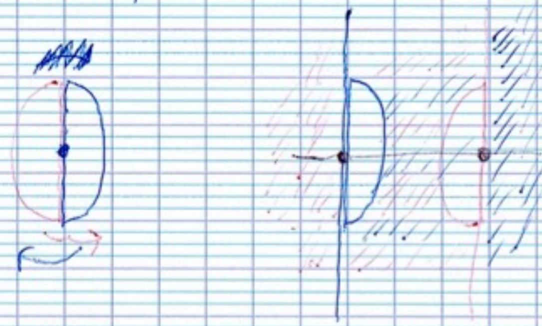
Ensuite, il faut aligner les points et faire en sorte qu'ils aient la bonne "configuration" pour qu'il puissent couvrir tous le plan.

1/3

Pour qu'ils puissent couvrant tout le plan, il faut remplir plusieurs conditions :

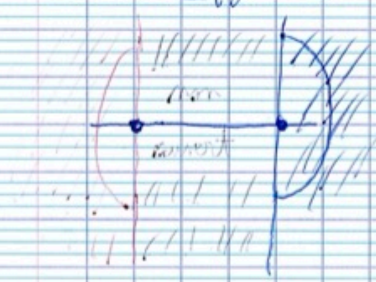
Par exemple pour $n=2$, on doit "inversé" l'emplacement pour pouvoir couvrir tous le plan.

ex :



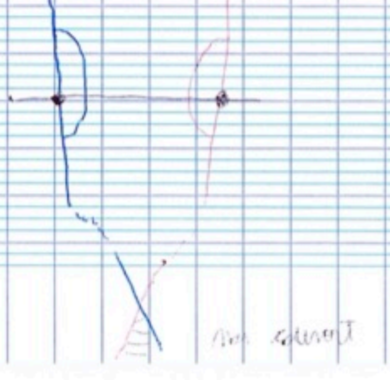
L'angle en rouge couvre tous le plan vers la gauche et l'angle bleu couvre le plan vers la droite

une mauvaise configuration :



Ensuite, il y a la condition de parallélisme, car si les droites ne sont pas parallèle, elles se croiseront un jour et formeront une zone non couvert :

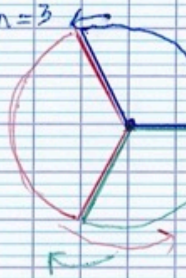
ex

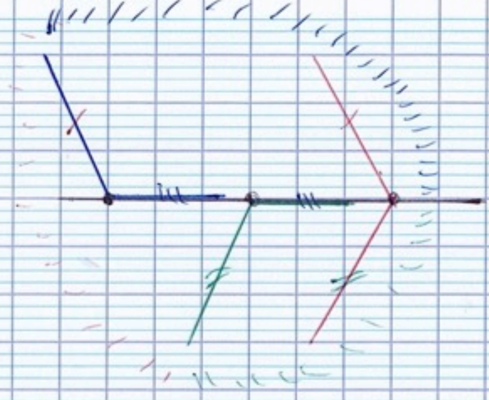


2/3

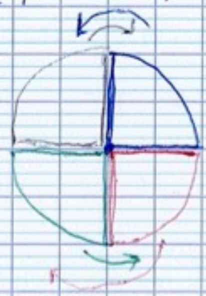
Donc on passe au autres exemples:

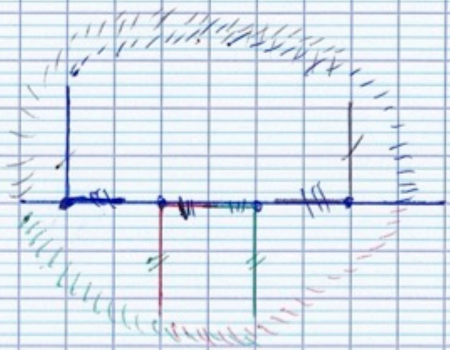
$n=3$



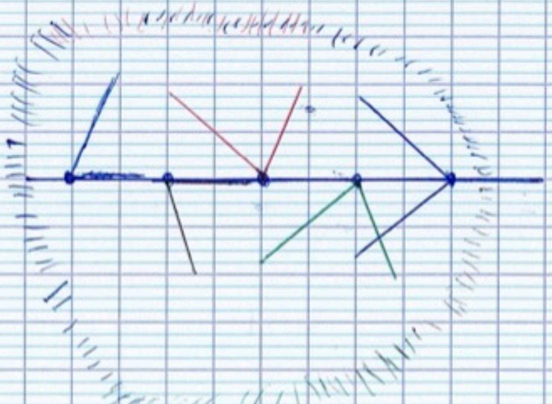


$n=4$





$n=5$



Donc pour répondre à la question :

pour $n=2$ $\theta \in [\pi]$ $n=4$ $\theta \in [90°; \pi]$

$n=3$ $\theta \in [120°; \pi]$ $n=5$ $\theta \in [72°; \pi]$

3/3

Problème 3 : somme de trois entiers consécutifs

Déterminer tous les entiers qui sont la somme d'au moins deux entiers consécutifs. Pour commencer, on pourra répondre à la question beaucoup plus facile : quels sont les entiers qui sont la somme d'exactement deux entiers consécutifs ?

Solution du groupe 4

Voir pages suivantes (9-10-11)

Commentaires :

- Dans ce problème il faut supposer que les nombres en jeu sont tous des entiers naturels. Sinon le problème n'est pas intéressant, comme le montre bien le groupe 4 à la fin de leur solution.
- La formule de la somme de *n* premiers entiers consécutifs est vraiment très-très-très utile, vous allez la rencontrer un peu partout.

Solution du groupe 4 :

Groupe 4

Problème 1

Soit $k \in \mathbb{Z}$

k et $k+1$ sont deux entiers consécutifs.

alors $k+k+1 = \underbrace{2k}_{\text{multiple de 2}} + 1$.

multiple de 2 + 1 = nombre impair.

nombre pair

Donc la somme de deux entiers consécutifs est égale à un nombre impair.

Observations :

$k + k+1 + k+2 + k+3 \ldots$

facteur impair $\begin{cases} 5(k+2) & 9(k+4) \\ 7(k+3) & 11(k+5) \end{cases}$

facteur pair $\begin{cases} 4 : 2(2k+3) & 8 : 4(2k+7) \\ 6 : 3(2k+5) \end{cases}$

↳ généralité

Soit n et k appartiennent à $\mathbb{N}$

n le nombres de termes

et k le premier nombre de la suite de entiers consécutifs

$(\underbrace{k+k+1 \ldots + n-1}_{n})$.

$S_n = k + k+1 + k+2 + \ldots + k+n-1$

$2(S_n) = 2(k+k+1+k+2+\ldots+k+n-1)$

$= 2k+n-1 + 2k+n-1 + \ldots + 2k+n-1$

$S_n = \dfrac{n(2k+n-1)}{2} = \dfrac{2kn+n^2-n}{2} = kn + \dfrac{1}{2}n^2 - \dfrac{1}{2}n$

1/3

$$\boxed{= n\left(k + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right)}$$

↳ Nombre entier ?

Si n est impair alors il se décompose sous la forme $2k' + 1$ où $k' \in \mathbb{N}$

$$= \frac{2k'+1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= k' + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= k'$$

↳ entier

Si n est pair alors il se décompose sous la forme $2k'$ où $k' \in \mathbb{N}$

$$= \frac{2k'}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= k' - \frac{1}{2}$$

$$= 2k'\left(k + k' - \frac{1}{2}\right)$$

on replace ds le contexte de la formule.

$$= 2k'k + 2k'^2 - k'$$

$2k'k > k'$ dc pas négatif et $\in \mathbb{N}$.

↳ Quels sont les entiers qui sont la somme d'au moins deux entiers consécutifs ?

Observation :

- nombre impair
- X puissances de 2.

2/3

Groupe 4

$$2^r \overset{?}{=} n\left(k + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right)$$

$$2^r = nk + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$$

$$2 \times 2^r = 2nk + n^2 - n$$

$$2^{r+1} = \underset{2^1}{n}\,\underset{\times\, 2^r}{(2k+n-1)}$$

$$\left.\underbrace{2k}_{\text{pair}} \underbrace{+n}_{\text{pair}} -1 \right\} \text{ impair}$$

donc les puissances de 2 ne sont pas décomposables en une somme d'entiers consécutifs.

$$-7 + (-6) + (-5) + (-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3$$

$$+4 + 5 + 6 + 7 + \underline{8} = 8$$

$$-(k-1) + \dots + 0 + \dots + (k-1) + k = k.$$

3/3

Problème 4 : polygone sur du papier quadrillé

Sur une feuille quadrillée, on a tracé un polygone tel que tous ses sommets se trouvent sur les noeuds du quadrillage et aucun de ses côtés ne suit les lignes du quadrillage. Montrez que la somme des longueurs de tous les segments verticaux du quadrillage à l'intérieur du polygone est égale à la somme des longueurs de tous les segments horizontaux.

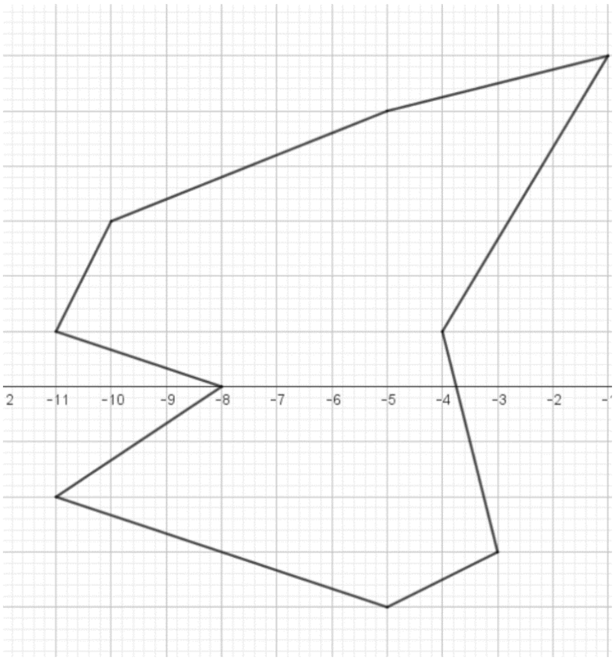
Que se passe-t-il si les côtés peuvent suivre les lignes du quadrillage ?

Solution du groupe 3

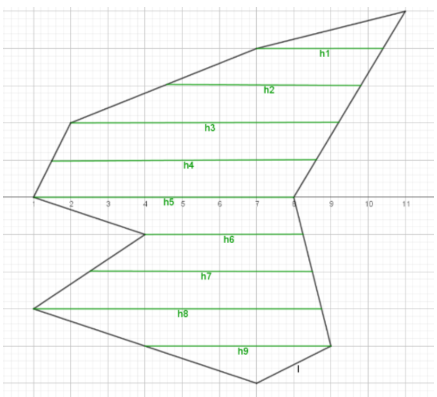
L'énoncé nous pose deux questions, par conséquent on peut diviser le problème en 2 parties, tout d'abord, il faut montrer que la somme des longueurs de tous les segments verticaux du quadrillage à l'intérieur du polygone est égale à la somme des longueurs de tous les segments horizontaux ensuite on s'intéressera au cas particulier avec un polygone dont les côtés suivent ceux des lignes du quadrillage.

Pour tout le problème, on considère chaque carré du quadrillage de 1 cm de côté.

<u>1ere partie :</u>



Soit une figure quelconque, qu'on divise en triangles et trapèze par les lignes horizontales, comme montré ci-dessous sur la figure. On a choisi des trapèzes (car leur aire dépend de 2 bases qui sont soit les verticales ou les horizontales ce qui nous arrange car on veut une égalité avec ces longueurs) et des triangles de hauteur 1, ainsi les aires ne seront qu'influencé par les longueurs horizontales.



Puis on calcule son aire totale avec la somme des aires des trapèzes et triangles le composant.

Aire totale= A_1+ A_2+ A_3+ A_4+ A_5+ A_6+ A_7+ A_8+ A_9+ A_{10}

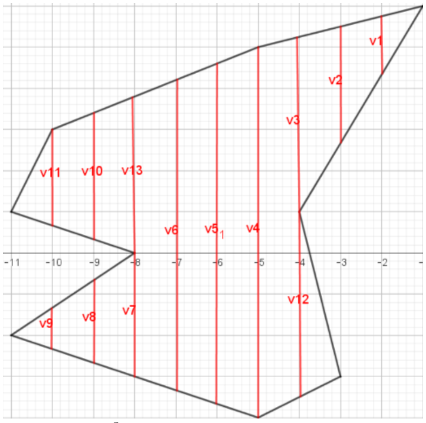
$$\text{Aire totale} = \frac{h1}{2} + \frac{h1+h2}{2} + \frac{h2+h3}{2} + \frac{h3+h4}{2} + \frac{h4+h5}{2} + \frac{h5+h6}{2} + \frac{h6+h7}{2} + \frac{h7+h8}{2} + \frac{h8+h9}{2} + \frac{h9}{2}$$

$$\text{Aire totale} = \frac{2h1 + 2h2 + 2h3 + 2h4 + 2h5 + 2h6 + 2h7 + 2h8 + 2h9}{2}$$

$$Aire\ totale = h1 + h2 + h3 + h4 + h5 + h6 + h7 + h8 + h9$$

Dans un second temps, on prend la figure initiale, cependant cette fois on la divise en triangles et trapèze par les lignes verticale, comme montré ci-dessous sur la figure. On a choisi des trapèzes et des triangles de hauteur 1, ainsi les aires ne seront qu'influencé par les longueurs verticales.

Puis on calcule son aire totale avec la somme des aires des trapèzes et triangles le composant.



Aire totale= A_1+ A_2+ A_3+ A_4+ A_5+ A_6+ A_7+ A_8+ A_9+ A_{10} +A_{11}+ A_{12}+ A_{13}+ A_{14}

$$\text{Aire totale} = \frac{v1}{2} + \frac{v1+v2}{2} + \frac{v2+v3}{2} + \frac{v3+v4+v12}{2} + \frac{v4+v5}{2} + \frac{v5+v6}{2} + \frac{v6+v7+v13}{2} + \frac{v7+v8}{2} + \frac{v8+v9}{2} + \frac{h9}{2} + \frac{v13+v10}{2} + \frac{v10+v11}{2} + \frac{v11}{2} + \frac{h12}{2}$$

$$\text{Aire totale} = \frac{2v1+2v2+2v3+2v4+2v5+2v6+2v7+2v8+2v9+2v10+2v11+2v12+2v13}{2}$$

$$Aire\ totale = v1+v2+v3+v4+v5+v6+v7+v8+v9+v10+v11+v12+v13$$

Comme l'aire totale reste la même mais calculer de manière différente, on peut alors poser l'égalité suivante :

Aire totale = Aire totale

Donc :

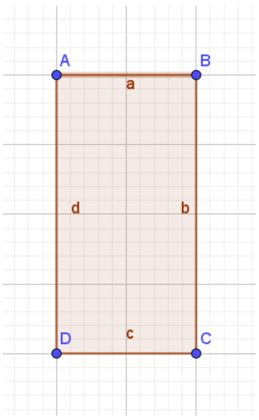
$$h1+h2+h3+h4+h5+h6+h7+h8+h9 = v1+v2+v3+v4+v5+v6+v7+v8+v9+v10+v11+v12+v13$$

<u>On constate que la somme des longueurs de tous les segments verticaux du quadrillage à l'intérieur du polygone est égale à la somme des longueurs de tous les segments horizontaux.</u>

Ainsi on a démontré l'égalité.

<u>2eme partie :</u>

Désormais on cherche à savoir ce qu'il se passe si les côtés suivent les lignes du quadrillage. Pour ce faire, prenons un exemple, un rectangle, comme le montre la figure ci-dessous.



Si on suit l'égalité qu'on a démontré dans les cas où les cotés ne suivent pas les lignes du quadrillage, on arrive à :

Somme des lignes horizontales = 6

Somme des lignes verticales = 4

On constate que 6≠4

<u>Donc l'égalité est fausse dans le cas où les côtés de la figure suivent les lignes du quadrillage.</u>

Solution du groupe 6

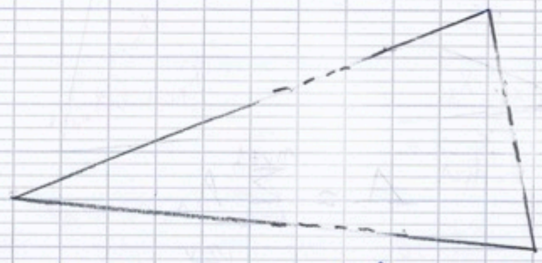
Voir pages suivantes (14-15-16)

Commentaires : Encore une fois il s'agit d'une méthode très souvent utilisée : on détermine la valeur de quelque chose (ici l'aire du polygone) de deux manières différentes, on obtient deux expressions différentes, mais comme ces expressions décrivent exactement le même objet, on obtient l'égalité voulue.

Solution du groupe 6

Sujet 6 : Résolution problème 2

Soit un triangle :

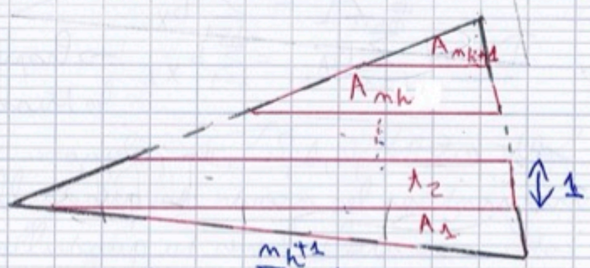


- ayant pour sommets les noeuds du quadrillage
- et qu'aucun de ses côtés ne suit les lignes du quadrillages

Soit $\mathcal{A}$ l'aire du triangle considéré. ($\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{+*}$)

Soit n_v, le nombre de segments verticaux du quadrillage à l'intérieur du triangle. ($n_v \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)

Soit n_h, le nombre de segments horizontaux du quadrillage à l'intérieur du triangle. ($n_h \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$).



Donc $\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{n_h+1} A_i$

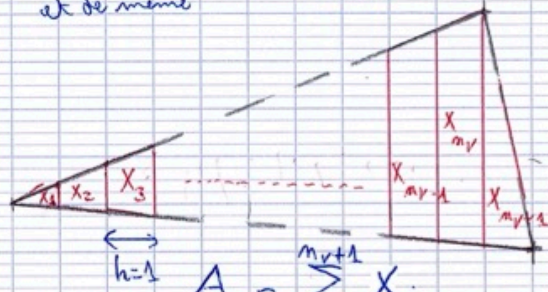
$$= A_1 + \left(\sum_{i=2}^{n_h} A_i\right) + A_{n_h+1}$$

$$= \frac{B_{A_1} \cdot h_{A_1}}{2} + \left(\sum_{i=2}^{n_h} \frac{h_{A_i}(B_{A_{i-1}} + B_{A_i})}{2}\right) + \frac{B_{A_{n_h}} \cdot h_{A_{n_h}}}{2}$$

$$= \frac{B_{A_1}}{2} + \left(\sum_{i=2}^{2n_h} \frac{B_{A_{i-1}} + B_{A_i}}{2}\right) + \frac{B_{A_{n_h}}}{2}$$

$$A = \sum_{i=1}^{m_h} B_{A_i}$$

et de même



$$A = \sum_{i=1}^{m_v+1} X_i$$

$$= X_1 + \left(\sum_{i=2}^{m_v} X_i\right) + X_{m_v+1}$$

$$= \frac{b_{X_1} \cdot h_{X_1}}{2} + \left(\sum_{i=2}^{m_v} \frac{h_{X_i} \cdot (b_{X_{i-1}} + b_{X_i})}{2}\right)$$

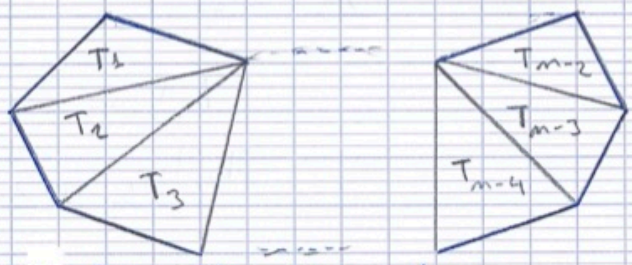
$$+ \frac{b_{X_{m_v+1}} \cdot h_{X_{m_v+1}}}{2}$$

$$= \frac{b_{X_1}}{2} + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=2}^{m_v} b_{X_{i-1}} + b_{X_i}\right) + \frac{b_{X_{m_v+1}}}{2}$$

$$A = \sum_{i=1}^{m_v+1} b_{X_i}$$

Donc $\sum_{i=1}^{m_h+1} B_{A_i} = \sum_{i=1}^{m_v+1} b_{X_i}$ → Propriété est vraie pour tous les triangles

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1;2\}$, un polygone à n sommets se trouvant sur les noeuds du quadrillage et dont aucun côté ne suivent les lignes du quadrillage.

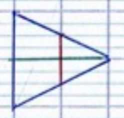


On a $\forall i \in [\![1; n-2]\!]$, $L_{h_i} = L_{v_i}$
(L_{h_i} somme des longueurs horizontales à l'intérieur du quadrillage

du $i^{ème}$ triangle et L_{v_i} la somme des longueurs verticales du quadrillage à l'intérieur du $i^{ème}$ triangle.

et donc $\boxed{\sum_{i=1}^{n-2} L_{h_i} = \sum_{i=1}^{n-2} L_{v_i}} \Rightarrow$ CQFD

Ex :



l'Égalité des longueurs n'est pas respecté.
Donc la propriété ne marche pas si un côté peut suivre les lignes du quadrillage.

Problème 5 : polygone plié

On dit qu'un polygone est convexe lorsque tous les angles internes sont inférieurs à 180°*.*

Dans ce problème on s'intéresse aux façons de plier des polygones convexes pour obtenir d'autres polygones. La règle est la suivante : on prend une feuille polygonale, on choisit deux sommets distincts A et B du polygone et plie le polygone le long de la médiatrice (d) du segment [AB] (ce qui revient à effectuer une symétrie axiale d'axe (d) à la partie du polygone du même côté de (d) que A). En particulier, le sommet A est replié sur le sommet B.

On dit qu'un pliage est convexe si le polygone obtenu est convexe.

1. *Décrire tous les pliés des polygones suivants.*
   a. *Les triangles équilatéraux, isocèles ou rectangles.*
   b. *Les triangles quelconques.*
   c. *Les polygones réguliers.*
2. *Soit* $n \geq 3$ *un entier.*
   a. *Combien de côtés au maximum peut avoir le plié convexe d'un polygone convexe à* n *côtés ?*
   b. *Et au minimum ?*

Solution du groupe 5

Def convexe : aucun angle intérieur ne fait plus de 180°.

Pour l'ensemble du problème, « n » sera le nombre de côté d'une figure, et le pliage des polygones se fera sur la médiatrice d'un des côté.

1-Décrire les pliés : triangles équilatéraux, isocèles ou rectangles, quelconques, polygones réguliers

Les triangles isocèles restent convexes en les pliant sur leurs médiatrices

Les triangles équilatéraux sont convexes qu'importe la médiatrice utilisée

Les triangles rectangles restent convexes et gagnent un côté

Les triangles quelconques restent convexes également et peuvent gagner un côté

Pour finir, les polygones réguliers restent convexes qu'importe la médiatrice utilisée

2- Combien de côtés au maximum et au minimum peut avoir le plié convexe d'un polygone convexe à « n » côtés ?

Pour la question, nous avons séparé les polygones convexes en deux groupes : ceux ayant un nombre de côté « n » inférieur ou égal à 4, donc les triangles et quadrilatères, et ceux ayant un nombre de côtés strictement supérieur à 4.

Les triangles et quadrilatères :

Pour les triangles réguliers (équilatéraux), en respectant le problème de convexité, nous ne pouvons avoir plus de 3 côtés après pliage convexe. Pour les triangles quelconques, nous pouvons former jusqu'à 4 côtés après pliage convexe. Donc le minimum est de 3 côtés et le maximum, comme avec le triangle isocèle est de 4 côtés. Pour les quadrilatères, comme sur le losange ou un quadrilatère quelconque, il n'est pas possible de faire plus de 5 cotés en respectant la convexité. Donc le maximum pour les triangles et les quadrilatères est de 5 côtés.

Polygone à plus de 4 côtés :

Pour chercher le minimum obtenable après pliage convexe, nous avons testé plusieurs combinaisons possibles et nous en sommes venu à la conclusion que le seul polygone convexe qui perd un côté et reste convexe est le pentagone. En le pliant sur la médiatrice de sa base, il n'a plus que 4 côtés.

Pour le maximum, nous avons remarqué qu'avec un polygone quelconque, si la médiatrice d'un côté ne passe pas par un des sommets de la figure, nous ne pouvons rajouter plus d'un côté à la figure tout en gardant le pliage convexe.

Problème 6 : synthèse de nombres

John aime jouer avec les nombres. Etant donné un entier n*, il décompose les chiffres de* n *en groupes (non vides) qui correspondent à des séquences successives identiques. Puis, il réécrit ce nombre comme s'il le lisait par groupes. Il juxtapose la suite de chiffres et obtient ainsi un nouvel entier : on dit qu'il s'agit d'une synthèse de* n.

Par exemple pour n = 12312377784545 *il peut choisir les groupes* (123, 123), (7, 7, 7), (8) *et* (45, 45). *Ainsi en lisant les groupes on obtient* 2 123, 3 7, 1 8 *et* 2 45. *Le nombre* 21233718245 *est donc une synthèse de* n.

Attention, un même nombre peut se synthétiser de plusieurs manières différentes. Par exemple, 133 *peut se synthétiser en cinq entiers différents :* (133) = 1133 *;* (13)(3) = 11313 *;* (1)(33) = 11133 *;* (1) (3,3) = 1123 et (1)(3)(3) = 111313.

On dit que John peut transformer l'entier n *en l'entier* m *s'il est possible de l'atteindre par des synthèses successives, c'est-à-dire s'il existe un entier* N >1 *et une suite (finie)* u_0, u_1, u_2, ..., u_N *d'entiers telle que* u_0 = n, u_N = m *et pour tout* k, u_{k+1} *est une synthèse de* u_k.

1. *Existe-t-il un entier* n *tel que* n *peut se transformer en* n *? Si oui, combien en existe-t-il ?*
2. *Existe-t-il un entier* n *tel qu'il soit impossible de transformer* n *en* n *? Si oui, combien en existe-t-il ?*

Solution du groupe 5

Nous avons trouvé que le nombre 22 peut se synthétiser en (2,2), ce qui revient au nombre de départ. Cette méthode fonctionne aussi pour tout nombre contenant un nombre pair de « 2 ».

Nous avons également trouvé que le nombre 111 peut se synthétiser en réalisant la synthétisation (1,111), puis (1,1111), etc. jusqu'à arriver à 11111111111, ce qui peut se synthétiser en (11,1), ce qui nous ramène à 111.

Cette méthode fonctionne également pour tous les nombres composés uniquement de « 1 », du moment qu'il y en a plus de deux. Par exemple, on peut synthétiser 1111 avec la méthode précédente, jusqu'à obtenir 22 « 1 », ce qui peut se synthétiser en (11,11), qui nous ramène à 1111.

Cette méthode marche aussi si on trouve un nombre quelconque après la suite de « 1 », tant qu'il y a au moins quatre « 1 ». Par exemple, on prend le nombre 11 115 631. On peut utiliser la méthode du début, jusqu'à obtenir onze « 1 » devant 5 631. On peut synthétiser ce nombre en (11,1), (1,5631), et cette synthétisation nous ramène à 11 115 631.

Enfin, on peut également encadrer le nombre quelconque avec des 1, minimum quatre « 1 » devant et minimum trois « 1 » derrière.

Avec ces méthodes, on peut conclure qu'il y a une infinité de nombres n synthétisables en n.

Une synthèse consiste à dire les nombres composant *n* à l'oral, donc si on fait apparaître un chiffre qui n'était pas dans la configuration de départ, on ne pourra jamais le faire disparaître et on ne reviendra jamais à *n*. Si on prend l'exemple du nombre 33 333, si on le synthétise en lui-même, il faudrait que le nombre reste composé de trois. Ici, on pourrait faire (3,3), (3,3), mais cependant cela revient à regrouper les 3 et donc à réduire le nombre, pas à l'augmenter.

On peut généraliser ce raisonnement à tous les nombres contenant uniquement des 3 : soit on doit rajouter un chiffre qui ne pourra plus disparaître, soit on réduit le nombre par groupes de trois jusqu'à ce que cela ne soit plus possible sans rajouter un autre chiffre.

Etant donné qu'il y a une infinité de ces nombres, il y a une infinité de nombres *n* tels qu'on ne peut pas les synthétiser en *n*.

Solution du groupe 7

Pour répondre à la première question, on commencera par créer un ensemble de solution :
$S = \{n_i, \exists N \in N, u_0 = u_N\}$

On remarque assez rapidement 22 peut se synthétiser en $(2, 2)$.
Ainsi en juxtaposant autant de 22 que l'on souhaite, on pourra tous les synthétiser en eux-mêmes.
$S = \left\{n_i, n_i = \sum_{k=0}^{i} 22 \times 10^k, i \in N\right\}$

On remarque que les nombres écris sous la forme $1111k$ peuvent, avec plusieurs synthétisations successives se synthétiser en eux-mêmes en ajoutant autant sept 1 devant le nombre afin de créer un 11-uplet de 1. On peut donc compléter notre ensemble:

$$S = \left\{n_i \mid n_i = \sum_{k=0}^{i} 22 \times 10^k,\ i \in N\right\} \cup \left\{n_i \mid n_i = 1111 \times 10^i + j,\ \text{où i est le nombre de chiffres de j }\right\}$$

Et pour finir on remarque qu'une synthétisation possible de 33 311 113 est (3,3,3)(1,1,1)(1)(3) . Par conséquent, à la manière de 22, on peut juxtaposer autant de 33 311 113 que l'on souhaite puisque c'est un principe récursif.

On achève notre ensemble de solution :

$$S = \left\{n_i \mid n_i = \sum_{k=0}^{i} 22 \times 10^k,\ i \in N\right\} \cup \left\{n_i \mid n_i = 1111 \times 10^i + j,\ \text{où i est le nombre de chiffres de j }\right\} \cup$$

$\cup \left\{n_i \mid n_i = \sum_{k=0}^{i} 3311113 \times 10^{9k},\ i \in N\right\}$ [
On peut donc affirmerqu'il existe une infinité de nombre n qu'on puisse synthétiser en n.

Pour la question 2, il suffit de remarquer que si $n\ n_i \notin S$ alors n ne peut se synthétiser en lui-même.

Problème 7 : guirlande lumineuse

Une guirlande lumineuse comporte n *petites lumières. Quand on l'allume quelques lumières s'allument tout de suite (les mêmes à chaque fois) et les autres non. Ensuite la guirlande se comporte comme suit : au bout de chaque minute toutes les lumières qui étaient allumées s'éteignent et celles qui étaient éteintes mais avaient exactement une "voisine" allumée s'allument. Pour quelles valeurs de* n *peut-on choisir les lumières qui s'allument au départ de sorte que la guirlande ne s'éteigne jamais complètement (tant qu'on ne coupe pas le courant, bien évidemment) ?*

Commentaires : Dans le cas où il est possible d'avoir une guirlande perpétuelle, plusieurs choix des lumières allumées au départ sont possibles. Plus ou moins faciles à démontrer. Les deux équipes ont trouvé des stratégies différentes. N'hésitez pas à en chercher d'autres.

Solution du groupe 3

Le problème étudié est le suivant :

On dispose d'une guirlande avec n petites lumières. Lorsqu'on la branche sur une prise, certaines lampes s'allument (ce sont toujours les mêmes au départ). Ensuite, chaque minute, toutes les lumières allumées s'éteignent et les lumières initialement éteintes s'allument lorsqu'elles disposent d'1 seule et unique voisine qui était allumée avant, et ainsi de suite.

On considère que la guirlande a au moins une lampe et on remplace les lampes allumées par des I et celles éteintes par O pour simplifier la mise en page.

Voici un exemple pour 6 :

I O O O O En bleu, la lampe qu'on ne peut pas allumer

O I O O O car elle a 2 voisines allumées et non pas 1.

I O I O O O

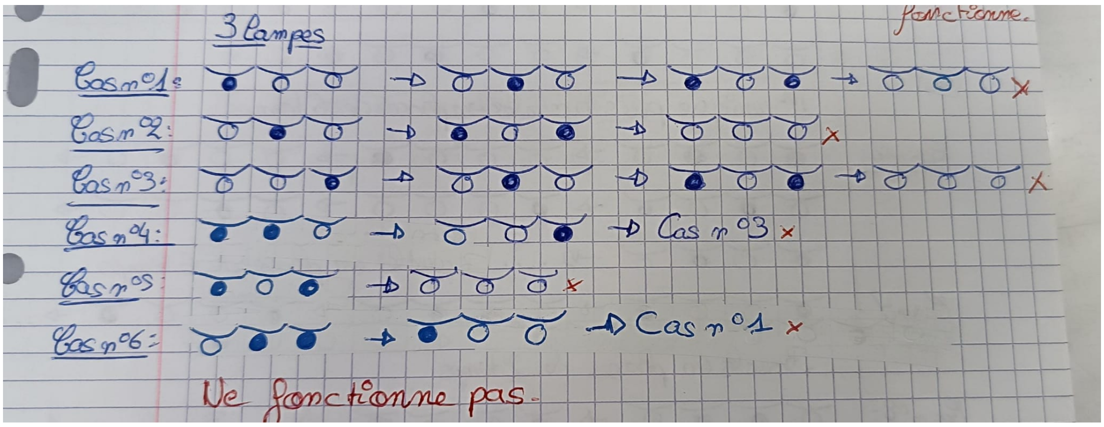
O O O I O O

Notre but est de trouver des valeurs de n pour lesquels les lumières restent toujours allumées et que la guirlande ne s'éteigne jamais.

Pour 1 : Nous avons tout de suite exclu la guirlande a seulement une lumière, ce qui parait plus que logique.

Pour 2 : La guirlande à deux lampes marche puisque de toute façon les deux lampes sont leur unique voisine respective.

Pour 3 : Nous avons testé toutes possibilités pour 3 mais aucune ne marche :



Nombres pairs :

Nous avons également distingué les nombres de départ pair des nombres de départ impairs.

Enfin, on a trouvé que pour tous les nombres paires (donc n est pair) fonctionne à chaque fois lorsque l'on commence par une ou deux lampes côte à côte allumées aux extrêmes :

Exemples :

1. On remarque qu'une boucle se répète (en couleur) ainsi que des motifs : des triangles se forment à l'intérieur de notre « circuit ». C'est symétrique.

Pour 8:

0 0 0 I I 0 0 0

0 0 I 0 0 I 0 0

0 I 0 I I 0 I 0

I 0 I 0 0 I 0 I

0 0 0 I I 0 0 0 -> On revient à la position de départ donc c'est une boucle infinie.

Nombres impairs :

Pour les nombres impairs : On est en cours de recherche, en essayant de s'intéresser des cas précis mais on pense que cela à avoir avec les congruences de 4.

Pour l'instant on a trouvé que ça marche pour n égale à 3 congruences 4 : $n \equiv 3$ [4]

Conclusion :

n$\in \mathbb{N} \setminus \{0 ;1 ;3\}$

Solution du groupe 6

Voir pages suivantes (22-23-24)

Ici les croix désignent les lumières allumées et les barres verticales désignent les lumières éteintes.

Solution du groupe 6

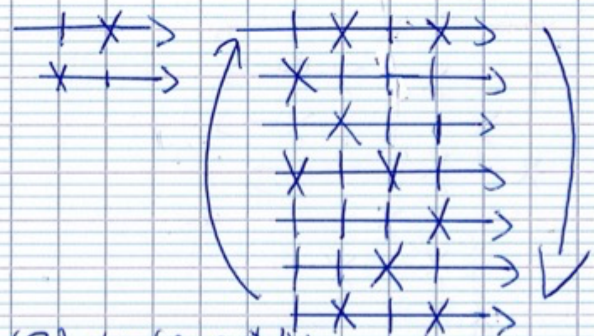
Résolution du problème n°1

Sujet 6

Conjecture :

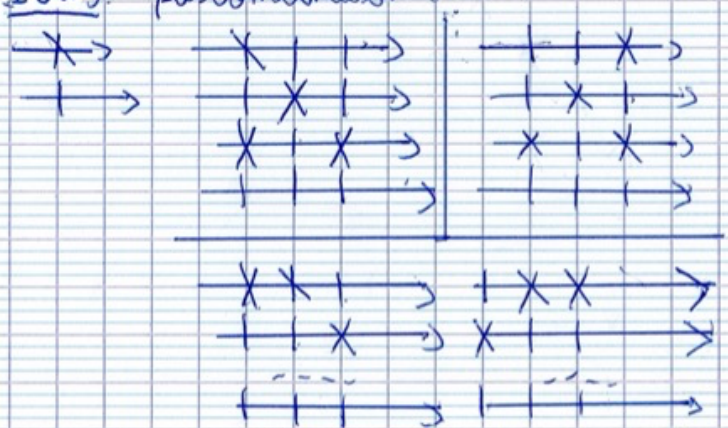
pair ($2k$ ($k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)) :
il faut allumer une lampe sur deux.

Ex :



impair ($2k+1$ ($k \in \mathbb{N}$)) :

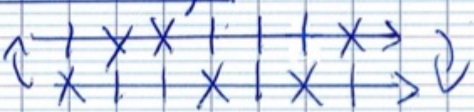
1 ou 3 pas combinaison

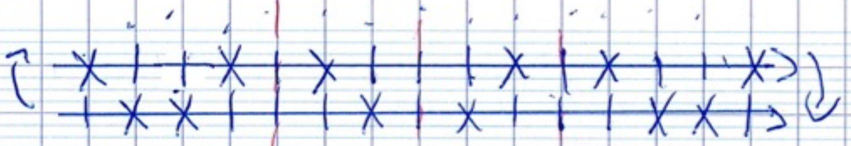


$2^k - 1$ ($k \in \mathbb{N} \setminus \{0;1;2\}$) :

méthode barrage :

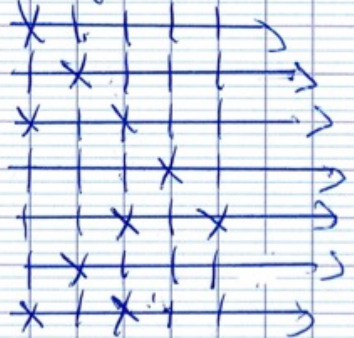
Ex :

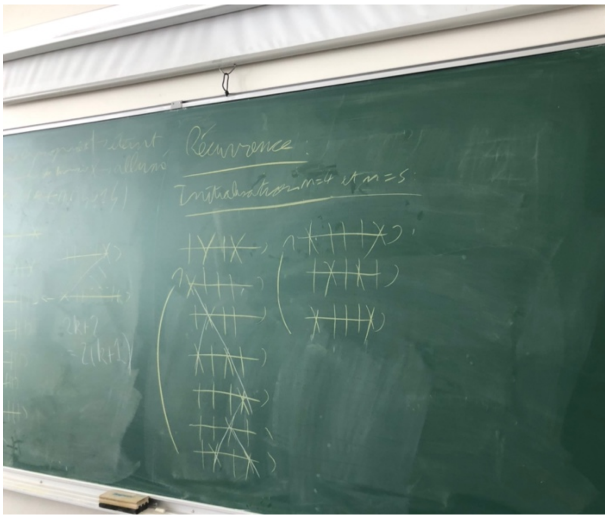


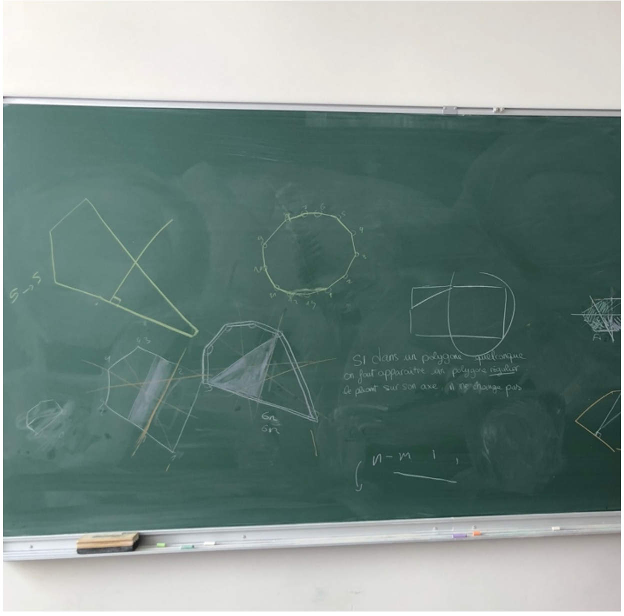


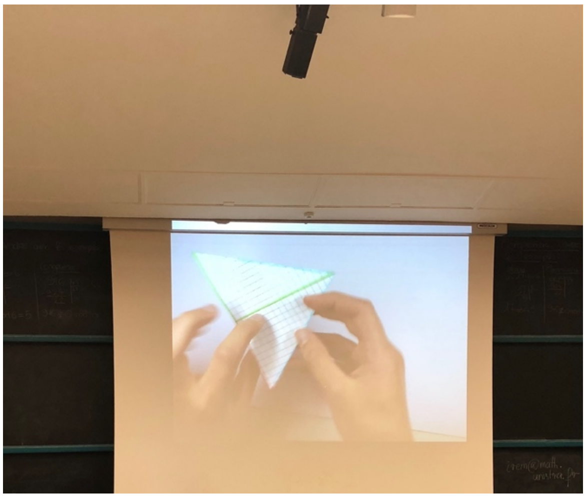
$\mathbb{N} \setminus \{2^k - 1 \ (k \in \mathbb{N})\}$:

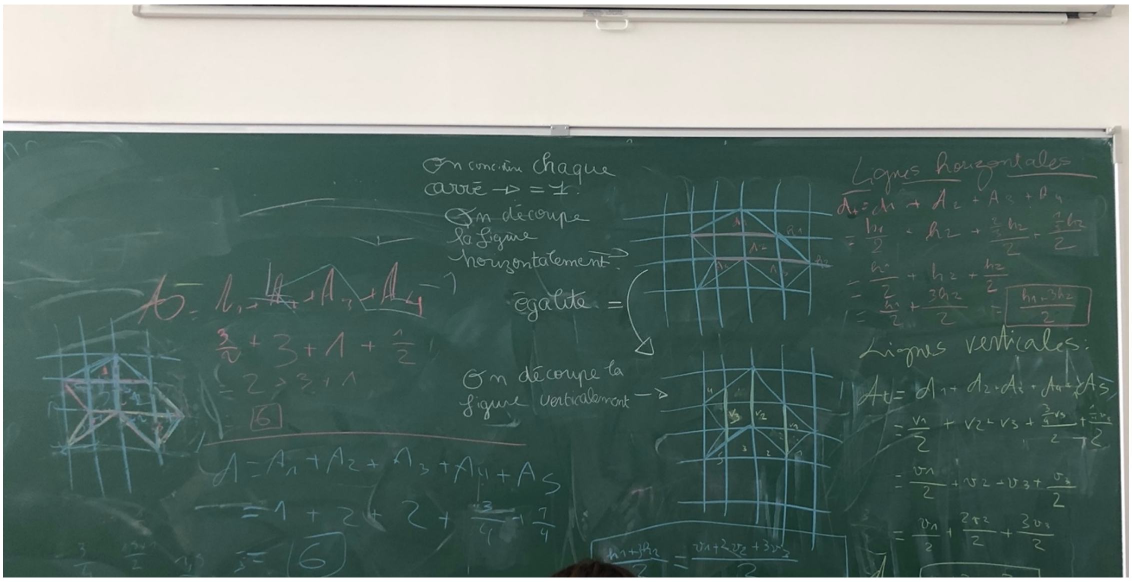
Il faut en allumer 1 au bout.




Récurrence
Initialisation n=4 et m=5


Si dans un polygone quelconque
on fait apparaître un polygone régulier
le pliant sur son axe, A ne change pas




On considère chaque carré → = 1.
On découpe la figure horizontalement
égalité =
On découpe la figure verticalement →
Lignes horizontales
Lignes verticales: