

MathC2+ 2026

Strasbourg

Problèmes de l'activité « Fil rouge »

Solutions proposées par les élèves

Commentaires

Vous trouverez dans ce recueil les solutions des problèmes que nous avons reçues. Elles ont été rédigées par les élèves. Nous avons fait le choix de vous les présenter telles quelles, parfois incomplètes, parfois avec des expressions maladroites car nous considérons que c'est tout à fait normal que les premiers jets (et c'est comme ça qu'il faut les prendre, comme les premiers jets, vu peu de temps que vous aviez pour la rédaction) ne soient pas parfaitement et proprement rédigés. Elles sont accompagnées de commentaires pour vous en faciliter la compréhension.

Nous espérons que ce document sera un bon souvenir du stage pour toutes et tous.



Énoncés des problèmes

Problème 1. On a un billard carré de côté de 1 mètre. Trouvez le nombre de trajectoires qui mènent d'un angle donné à un angle quelconque du billard et qui ont une longueur inférieure ou égale à 6 mètres.

Problème 2. John aime jouer avec les nombres. Étant donné un entier n , il décompose les chiffres de n en groupes (non vides) qui correspondent à des séquences successives identiques. Puis, il réécrit ce nombre comme s'il le lisait par groupes. Il juxtapose la suite de chiffres et obtient ainsi un nouvel entier : on dit qu'il s'agit d'une *synthèse* de n .

Par exemple pour $n = 12312377784545$ il peut choisir les groupes (123, 123), (7, 7, 7), (8) et (45, 45). Ainsi en lisant les groupes on obtient 2 123, 3 7, 1 8 et 2 45. Le nombre 21233718245 est donc une *synthèse* de n .

Attention, un même nombre peut se synthétiser de plusieurs manières différentes. Par exemple, 133 peut se synthétiser en cinq entiers différents :

$$(133) = 1133 ; (13)(3) = 11313 ; (1)(33) = 11133 ; (1)(3,3) = 1123 \text{ et } (1)(3)(3) = 111313.$$

On dit que John peut transformer l'entier n en l'entier m s'il est possible de l'atteindre par des synthèses successives, c'est-à-dire s'il existe un entier $N > 1$ et une suite (finie) $u_0, u_1, u_2, \dots, u_N$ d'entiers telle que $u_0 = n$, $u_N = m$ et pour tout k , u_{k+1} est une synthèse de u_k .

1. Existe-t-il un entier n tel que n peut se transformer en n ? Si oui, combien en existe-t-il ?
2. Existe-t-il un entier n tel qu'il soit impossible de transformer n en n ? Si oui, combien en existe-t-il ?

Problème 3. Un surfeur veut passer ses vacances sur une île en forme de triangle équilatéral. Comme il veut pouvoir surfer sur les trois plages de l'île, il veut poser sa tente à l'endroit d'où la somme des distances aux côtes est la plus faible possible.

Pouvez-vous l'aider à trouver l'emplacement idéal ?

Problème 4. Soient m et n des entiers strictement positifs. On souhaite découper une planche sur laquelle est tracée une grille rectangulaire de dimensions $m \times n$. Cette opération se fait en plusieurs étapes, qu'on nomme *coupes*, qui doivent respecter les contraintes suivantes :

- On coupe sur les lignes de la grille.
- On coupe en ligne droite d'un bord à l'autre.
- Une fois que la planche est séparée en plusieurs pièces, on ne peut couper qu'une pièce à la fois.

Pour quelles valeurs de m et de n peut-on trouver une partition de la planche en dominos (c'est-à-dire des rectangles de dimensions 2×1 et 1×2) qu'il est impossible d'obtenir avec des telles coupes ?

Problème 5. On dit qu'un polygone est *convexe* lorsque tous les angles internes sont inférieurs à 180° .

Dans ce problème on s'intéresse aux façons de plier des polygones convexes pour obtenir d'autres polygones. La règle est la suivante : on prend une feuille polygonale, on choisit deux sommets distincts A et B du polygone et on plie le polygone le long de la médiatrice (d) du segment $[AB]$ (ce qui revient à effectuer une symétrie axiale d'axe (d)). En particulier, le sommet A est replié sur le sommet B .

On dit qu'un pliage est *convexe* si le polygone obtenu est convexe.

1. Décrire tous les pliés des polygones suivants.
 - (a) Les triangles équilatéraux, isocèles ou rectangles.
 - (b) Les triangles quelconques.
 - (c) Les polygones réguliers.
2. Soit $n \geq 3$ un entier.
 - (a) Combien de côtés au maximum peut avoir le plié convexe d'un polygone convexe à n côtés?
 - (b) Et au minimum ?

Problème 6. Une guirlande lumineuse comporte n petites lumières. Quand on l'allume quelques lumières s'allument tout de suite (les mêmes à chaque fois) et les autres non. Ensuite la guirlande se comporte comme suit : au bout de chaque minute toutes les lumières qui étaient allumées s'éteignent et celles qui étaient éteintes mais avaient exactement une "voisine" allumée s'allument. Pour quelles valeurs de n peut-on choisir les lumières qui s'allument au départ de sorte que la guirlande ne s'éteigne jamais complètement (tant qu'on ne coupe pas le courant, bien évidemment) ?

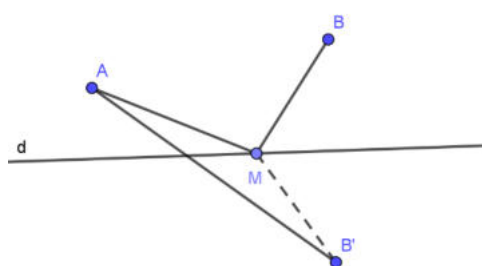
Question supplémentaire : que se passe-t-il si la guirlande est fermée ?

Problème 1 :

On a un billard carré de côté de 1 mètre. Trouvez le nombre de trajectoires qui mènent d'un angle donné à un angle quelconque du billard et qui ont une longueur inférieure ou égale à 6 mètres.

Commentaire préalable :

Ce problème est apparenté au problème classique d'optimisation géométrique, que l'on retrouve souvent dans des manuels : étant donné deux points d'un même côté par rapport à une droite, trouver un point sur cette droite qui minimise la somme de distances entre ce point et les deux points de départ.



Sur le dessin ci-contre, le point B' est le symétrique de B par rapport à la droite d . Il est facile de voir que la longueur de la ligne brisée AMB est égale à la longueur de la ligne AMB' .

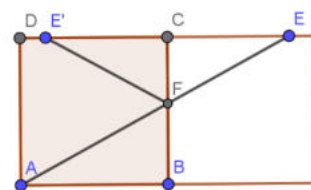
Dans le problème d'optimisation on en conclut que la somme de distances est minimale quand la ligne AMB' est en fait le segment $[AB']$.

Dans ce problème on utilise le même argument pour tracer les trajectoires : on sait que la trajectoire d'une boule minimise la somme des distances, on peut donc « déplier » la trajectoire en

regardant les symétriques de notre table de billard par rapport à ses côtés. A chaque rebond correspond une réflexion.

Par exemple, sur le dessin ci-contre, le segment $[AE]$ représente la trajectoire de la boule qui part du point A et arrive au point E' . La seule possibilité pour que la boule tombe dans un trou après un rebond est que le point E soit le coin.

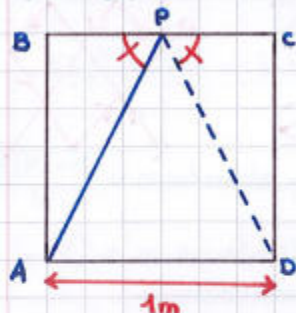
Deux questions supplémentaires ont été posées aux groupes différents : que se passe-t-il si le billard n'est plus carré mais rectangulaire ou en forme de triangle équilatéral ? Dans les deux cas la difficulté réside non dans le principe même de regarder les grilles qui résultent des réflexions successives, mais dans le comptage des nœuds de ces grilles à distance donnée de l'origine. Entre autres, il faut faire beaucoup plus attention à quels points « près du bord de la zone » il faut compter ou ne pas compter.



Solution proposée :

Problème du billard

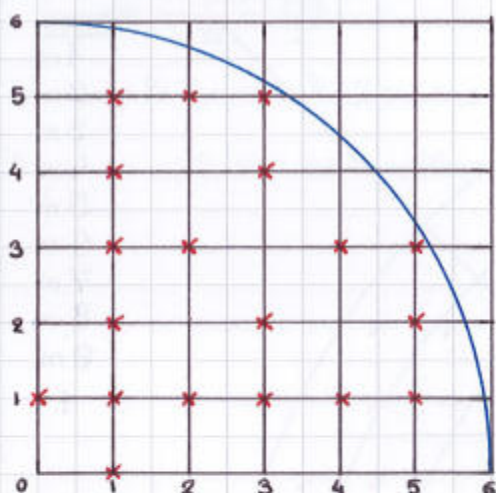
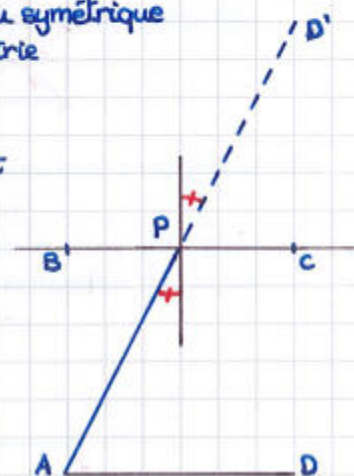
Sur un billard de côté 1m, on cherche le nombre de trajectoires qui partent d'un coin et mènent à un autre et qui ont une longueur inférieure ou égale à 6 m.



Il faut savoir que lorsque la balle touche un bord du billard, l'angle qu'elle forme en arrivant sur le bord est égal à l'angle avec lequel elle repart.

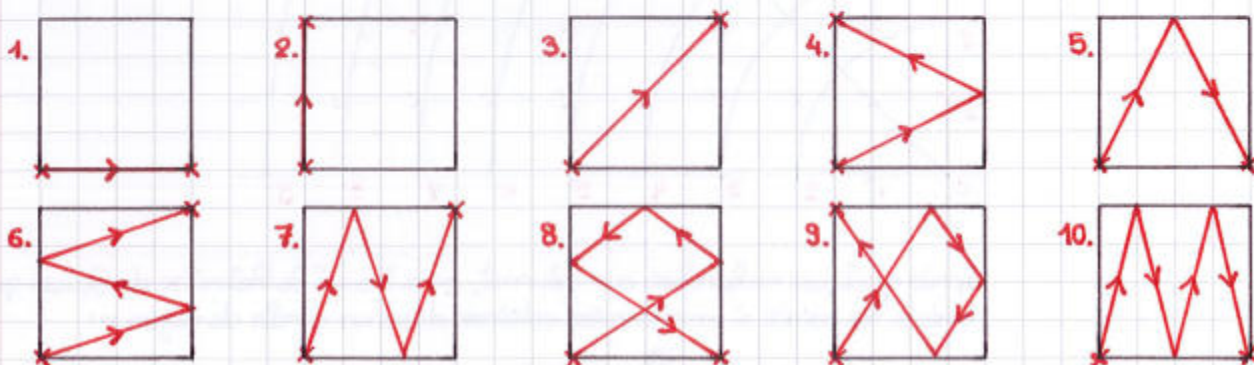
Prenons la trajectoire ci-contre. Déterminer sa valeur revient à calculer AP additionné à la longueur du symétrique du segment [DP], étant donné que la symétrie axiale conserve les longueurs.

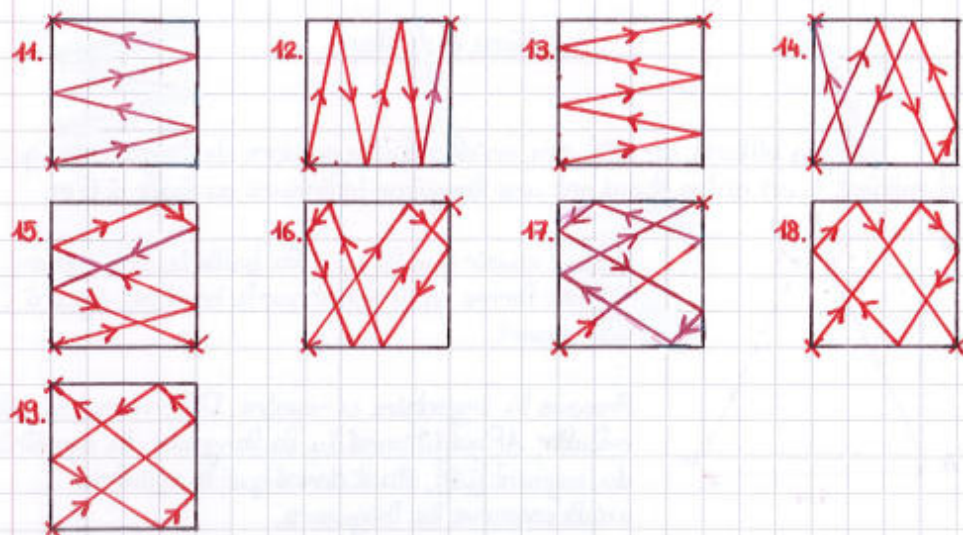
Si l'on généralise, trouver toutes les trajectoires qui atteignent un coin du billard avec une longueur inférieure ou égale à 6 m revient à « déplier » le billard en constituant successivement ses symétriques, comme ci-dessous. Il suffit alors de repérer tous les points à coordonnées entières situés à l'intérieur du cercle de rayon 6 m.



On ne retient pas les points dont les coordonnées sont proportionnelles à celles d'un point déjà compté car cela signifie que la balle est déjà arrivée à un coin du billard avant d'atteindre ce coin.

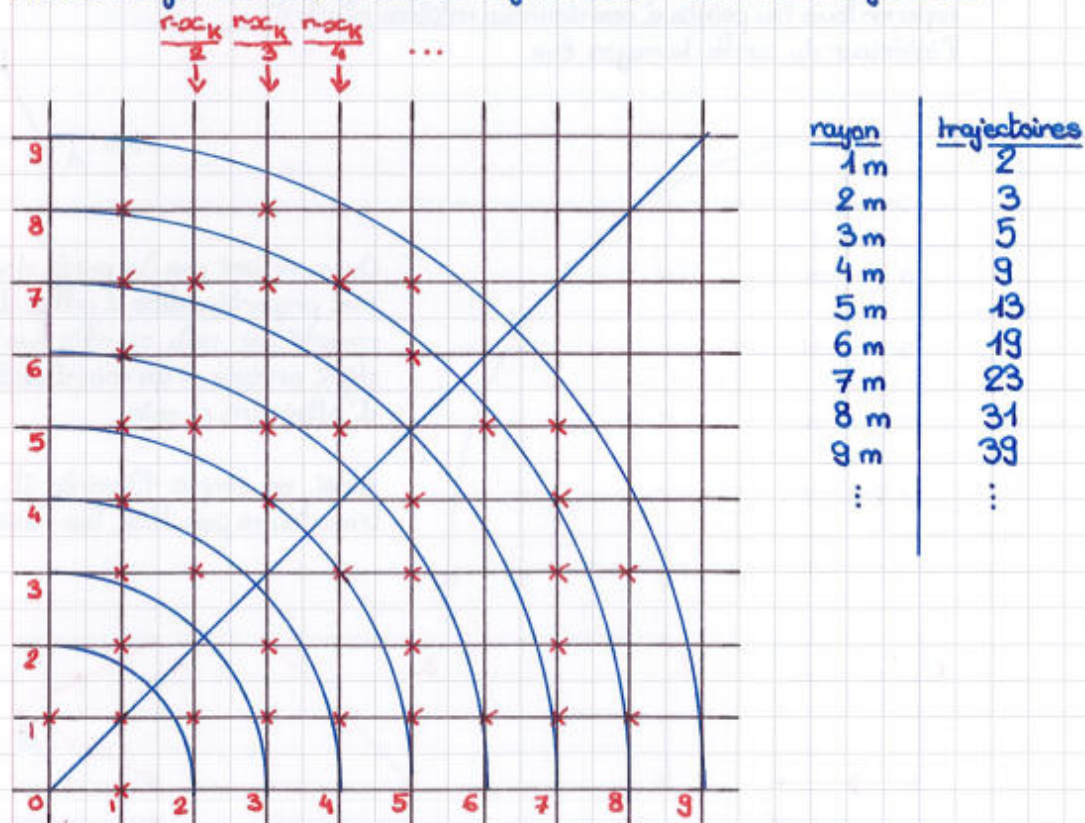
Ainsi, on compte 19 points, il y a donc 19 trajectoires possibles, les voici :





Prolongements du problème:

Avec un rayon variable, on cherche à généraliser le nombre de trajectoires.



Après quelques recherches sur internet, on a trouvé le théorème de Gauss qui calcule le nombre de points à coordonnées entières dans un cercle de rayon r :

$$N(r) = 1 + 4\lfloor r \rfloor + 4 \sum_{k=1}^{\lfloor r \rfloor} \lfloor \sqrt{r^2 - k^2} \rfloor$$

On souhaite soustraire à cette formule tous les points que l'on a enlevés. On trouve :

$$P(r) = \frac{N(r)-1}{4} - (r-2) + \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{r\sqrt{2}}{2} \rfloor} (-2 \lfloor \frac{r-\alpha_k}{k} \rfloor + 1)$$

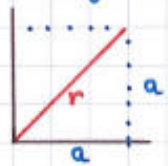
$$\text{avec } \alpha_k = \sqrt{r^2 - k^2}$$

Explications de la formule :

- $\frac{N(r)-1}{4}$ → nombre de points à coordonnées entières dans le quart de cercle sans le centre
- $-(r-2)$ → on soustrait les points situés sur les axes et on ajoute 2 pour les points de coordonnées (1;0) et (0;1) car ceux-ci fonctionnent.
- $+\sum_{k=2}^{\lfloor \frac{r\sqrt{2}}{2} \rfloor} (-2 \lfloor \frac{r-\alpha_k}{k} \rfloor + 1)$ → on enlève tous les points dont les coordonnées sont proportionnelles à un autre point
 - on multiplie par -2 car on n'a compté que les points au-dessus de la diagonale qui est un axe de symétrie, donc il y a autant de points au-dessus qu'en dessous de la diagonale.
 - on arrête la somme lorsque k équivaut à $\lfloor \frac{r\sqrt{2}}{2} \rfloor$ car d'après le schéma ci-contre : $2a^2 = r^2$

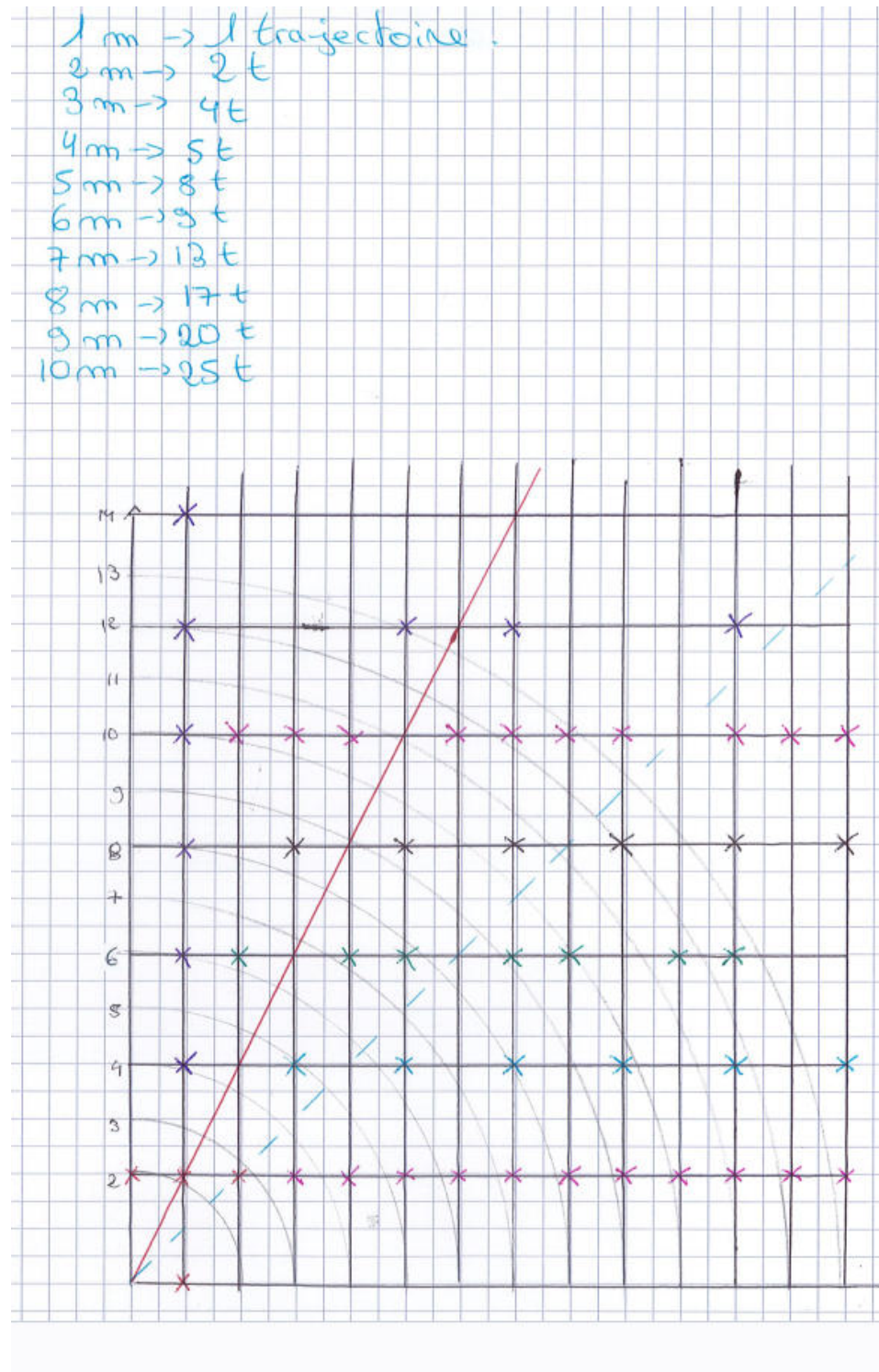
$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{r^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$
- on commence la somme à $k=2$ car on compte tous les points sur la première ligne.
- $\lfloor \frac{r-\alpha_k}{k} \rfloor$ → voir explication sur le schéma à la page précédente



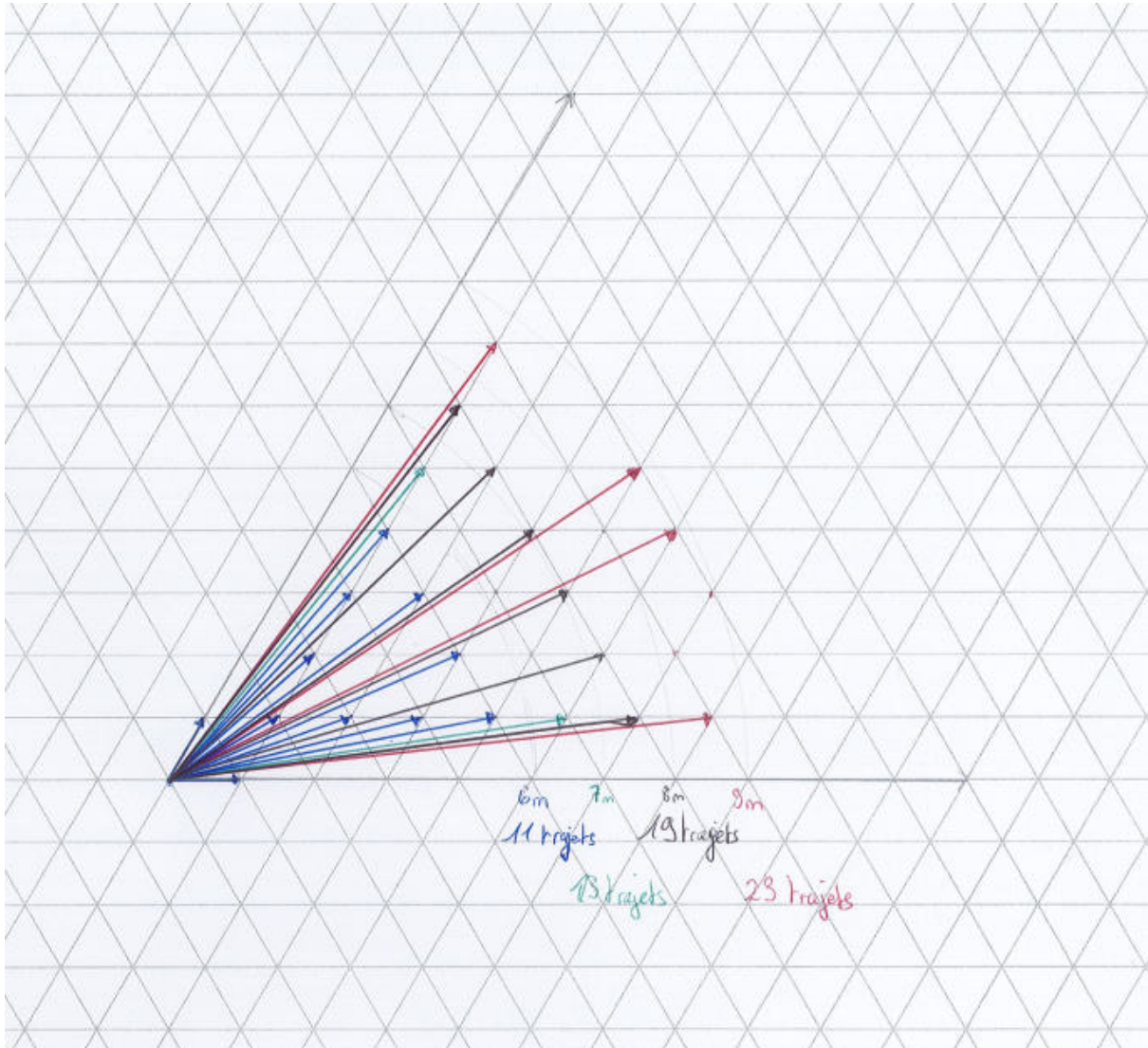
Cas de la grille rectangulaire :

On y voit que le nombre des nœuds qui sont des fins de trajectoires au-dessus de la « diagonale » (la ligne qui représente le cas où la boule tombe dans le trou opposé au point de départ) n'est pas du tout le même que celui au-dessous. Ce qui rend le comptage difficile si l'on veut trouver le nombre de trajectoires pour la distance quelconque.



Cas d'un billard triangulaire :

Le comptage est plus facile ici, une fois qu'on comprend qu'il ne faut pas regarder un quart du plan (dans les deux cas précédents, on cherchait tous les points dans le premier quart) mais un sixième, car les directions de départ sont toutes dans un angle de 60 degrés.



Problème 2

John aime jouer avec les nombres. Étant donné un entier n , il décompose les chiffres de n en groupes (non vides) qui correspondent à des séquences successives identiques. Puis, il réécrit ce nombre comme s'il le lisait par groupes. Il juxtapose la suite de chiffres et obtient ainsi un nouvel entier : on dit qu'il s'agit d'une synthèse de n .

Par exemple pour $n = 12312377784545$ il peut choisir les groupes $(123, 123)$, $(7, 7, 7)$, (8) et $(45, 45)$. Ainsi en lisant les groupes on obtient 2 123, 3 7, 1 8 et 2 45. Le nombre 21233718245 est donc une synthèse de n .

Attention, un même nombre peut se synthétiser de plusieurs manières différentes. Par exemple, 133 peut se synthétiser en cinq entiers différents :

$$(133) = 1133 ; (13)(3) = 11313 ; (1)(33) = 11133 ; (1)(3, 3) = 1123 \text{ et } (1)(3)(3) = 111313.$$

On dit que John peut transformer l'entier n en l'entier m s'il est possible de l'atteindre par des synthèses successives, c'est-à-dire s'il existe un entier $N > 1$ et une suite (finie) $u_0, u_1, u_2, \dots, u_N$ d'entiers telle que $u_0 = n$, $u_N = m$ et pour tout k , u_{k+1} est une synthèse de u_k .

1. Existe-t-il un entier n tel que n peut se transformer en n ? Si oui, combien en existe-t-il ?
2. Existe-t-il un entier n tel qu'il soit impossible de transformer n en n ? Si oui, combien en existe-t-il ?

Commentaire :

Pour commencer, voici une observation très importante, qui est derrière toute recherche d'exemples et de contre-exemples : si à un moment ou à un autre une synthèse introduit un nouveau chiffre dans l'écriture, on ne pourra pas l'éliminer dans des synthèses suivantes car ce chiffre devra être « lu » d'une manière ou d'une autre. Par exemple si on synthétise 333 comme « trois fois 3 », on obtient 33 (on supprime donc un 3), mais si on le synthétise comme « une fois 33 et une fois 3 », on introduit deux chiffres 1 : 13313, et le 1 ne pourra pas être supprimé par des synthèses suivantes. C'est ce qui est expliqué à la fin de la première page de la solution proposée.

Solution proposée :

Problème John

Nous avons consulté le cas de John, qui aime jouer avec les nombres. Il décompose les chiffres de n , un entier naturel, en groupe qui correspondent à des séquences successives identiques.

Comme on peut le voir dans l'exemple : 123 123 777 8 45 45.

Puis il réécrit ce nombre comme si il le lisait par groupe : il juxtapose la suite de chiffres et obtient ainsi un nouvel entier.

On peut le lire comme ça : il y a 2x 123, 3x 7, 1x 8, 2x 45.

Le nouveau entier est donc 21233718245.

On dit qu'il s'agit d'une synthèse. $\hookrightarrow$ Ce nombre là est donc une synthèse de n .

Cependant dans la 2nd partie de l'énoncé, on nous explique qu'un même nombre peut être synthétisé de plusieurs manières différentes.

On prend ici l'exemple de 133 qui est synthétisé de 5 manières différentes. On peut lire l'information comme

- 1x 133 ce qui donne 1133
- 1x 13, 1x 3 ce qui donne 11313
- 1x 1, 1x 33 ce qui donne 11133
- 1x 1, 2x 3 ce qui donne 11233
- 1x 1, 1x 3, 1x 3 ce qui donne 111313

Donc pour réussir à répondre à nos deux questions nous avons dû utiliser la synthétisation la plus adéquate, sachant que quand un chiffre apparaît il ne peut plus disparaître.

Problème des nombres de John

- 1) Oui, il existe un entier n tel que n peut se transformer en n .
 Par exemple, 22 peut s'écrire sous la forme $(2,2)$, donc 22.
 Pareil pour 2222, 222222 etc...

Il en existe une infinité. En effet, un nombre qui commence par 1111 et qui se suit par une suite de nombre k pourra toujours "s'auto-synthétiser". Le nombre 1111 k peut alors se synthétiser en $1(1)1(1)1(1)1(k)$, ce qui nous donne 1111 1111 k , en gras une suite de nombre " k " avec 1 devant. On peut synthétiser ce nouveau nombre en $1(111111111)1(k)$, ce qui nous donne 1111111111 k , en gras on a 1 devant de la suite " k ". Il suffit de synthétiser une dernière fois ce nombre en $1(1)1(k)$, ce qui nous donne 1111 k , notre nombre initial.

- 2) Oui, il existe un entier n tel qu'il soit impossible de transformer n en n , par exemple 2, car pour le synthétiser on est obligé de rajouter un 1 devant, soit $1(2)$, or lorsqu'on rajoute un chiffre, il est impossible de le retirer, donc on ne peut plus retourner à 2 car ce nombre ne contient aucun 1. $\square$

Il en existe une infinité. En effet, tout les nombres qui sont constitués d'un seul chiffre " m ", il faut avec $1 \in \mathbb{N}$ et 1 et on premier entre eux sont impossibles à auto-synthétiser. Démonstration.

Soit k un entier positif qui peut s'écrire sous la forme :

$$\sum_{n=0}^{m \times y} m \times 10^n, \quad m \in \mathbb{N} \quad 1 \leq m \leq 9, \quad y \in \mathbb{N}$$

Commentaire :

Ce qui est démontré ici est plus fort que ce qui a été demandé dans la question initiale : pour dire qu'il y a une infinité de nombres qui se synthétisent en eux-mêmes, l'exemple de tous les nombres qui s'écrivent avec un nombre pair de 2 suffirait. L'équipe prouve qu'il y a une infinité de nombres qui ne se ressemblent pas.

$\Rightarrow$ Cet entier k est constitué d'un seul chiffre m compris entre 1 exclus et 9 inclus, m apparaît l fois, avec $l = m \times y + 1$. Étant donné que l est m fois premier entre m car $l = m \times y + 1$ et $m \neq 1$ et $\neq 0$, on sera obligé de synthétiser l au moins 1 fois avec un nombre qui n'est pas un $*$. Étant donné que m rajoute un nombre différent, il sera impossible de l'entendre et donc on ne pourra pas revenir à k .

$*$ multiple de m

Exemple :
 Prenons 3 333. Ce chiffre peut s'écrire sous la forme $3000 + 300 + 30 + 3$, donc

$$k = \sum_{m=0}^{3 \times 1} 3 \times 10^m, \text{ avec } m=3 \text{ et } y=1$$

$$l = m \times y + 1$$

$$\rightarrow l = 3 \times 1 + 1 = 4$$

4 et 3 ont premiers entre eux. Ça veut dire que 3 333 se synthétise au moins avec un nombre qui n'est pas un multiple de 3.

3 333 $\rightarrow$ 4(3) $\rightarrow$ 43	$\left. \begin{array}{l} \text{à chaque fois qu'on synthétise, on} \\ \text{rajoute un nouveau chiffre qui n'est} \\ \text{pas le même que le précédent, donc impossible} \end{array} \right\}$
3 3 33 $\rightarrow$ 2(3) 2(3) $\rightarrow$ 2323	
3 3 3 3 $\rightarrow$ 3(3) 1(3) $\rightarrow$ 3313	
3 3 3 3 $\rightarrow$ 1(3) 3(3) $\rightarrow$ 1333	

...

Commentaire :

C'est ici que l'argument du début prend son ampleur : à partir du moment où on ne peut pas synthétiser un nombre sans introduire un nouveau chiffre, le nombre ne peut pas être transformé en lui-même par une suite de synthèses.

Et voici quelques exemple (le signe « = » doit être lu comme « se synthétise en... » pas comme une vraie égalité.

$$\begin{aligned}
 2 &= 2 \times (2) = 2 \quad 2 \\
 2 \quad 2 &= 2 \times (2), 2 \times (2) = 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \\
 &= 2 \times (2), 1 \times (2) = 2 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \neq 2 \quad 2 \quad 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 &= 1 \times (1111) = 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\
 1 \quad 1 &= 1 \times (111111) = 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\
 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 &= 1 \times (11111111) = 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1
 \end{aligned}$$

Problème 3

Un surfeur veut passer ses vacances sur une île en forme de triangle équilatéral. Comme il veut pouvoir surfer sur les trois plages de l'île, il veut poser sa tente à l'endroit d'où la somme des distances aux côtes est la plus faible possible. Pouvez-vous l'aider à trouver l'emplacement idéal ?

Question supplémentaire : le résultat reste-t-il vrai si le triangle n'est pas équilatéral ?

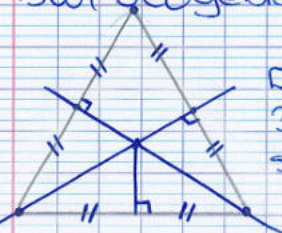
Commentaire :

Les deux équipes ont choisi de présenter des solutions séparées et pas une solution commune. Les deux présentent le même résultat : si le triangle est isocèle, la somme des distances aux bords ne dépend pas du point où le surfeur s'installe. Géogebra est ici (dans la première solution) un bon outil pour donner l'intuition. Mais le résultat doit tout de même être démontré rigoureusement.

Solutions proposées :

Problème 2) Un surfeur veut passer ses vacances sur une île en forme de triangle équilatéral. Il veut pouvoir surfer sur les 3 plages de l'île, il veut poser sa tente à l'endroit d'où la somme des distances aux côtes est la plus faible possible.

Pour cela nous avons essayé ces figures sur Géogebra :



Dans ce cas là la somme des 3 distances est égale à 8,6603cm si les 3 côtés font 10cm

Donc peu importe, l'emplacement du point on obtient le même résultat.

Soit ABC un triangle équilatéral représentant l'île. On choisit un point I à l'intérieur du triangle, où le surfeur plante sa tente.

On note :

- D le projeté orthogonal de I sur [AC].
- E le projeté orthogonal de I sur [BC].
- F le projeté orthogonal de I sur [AB].

Les distances du point I aux 3 plages sont donc ID, IE et IF.

Alors s (somme) = $ID + IE + IF$.

Le triangle ABC est la réunion des 3 triangles AIB, BIC et CIA. On a donc:

$$A(ABC) = A(AIB) + A(BIC) + A(CIA).$$

$$\text{Or: } A(AIB)$$

$$A(AIB) = \frac{AB \times IF}{2} \quad A(BIC) = \frac{BC \times IE}{2}$$

Comme ABC est équilatéral, ses 3 côtés ont la même longueur. Ainsi
(a)

$$A(ABC) = \frac{a}{2} (ID + IE + IF) \text{ d'où:}$$

$$ID + IE + IF = \frac{2A(ABC)}{a}$$

La somme $ID + IE + IF$ est donc constante, quel que soit le point I.

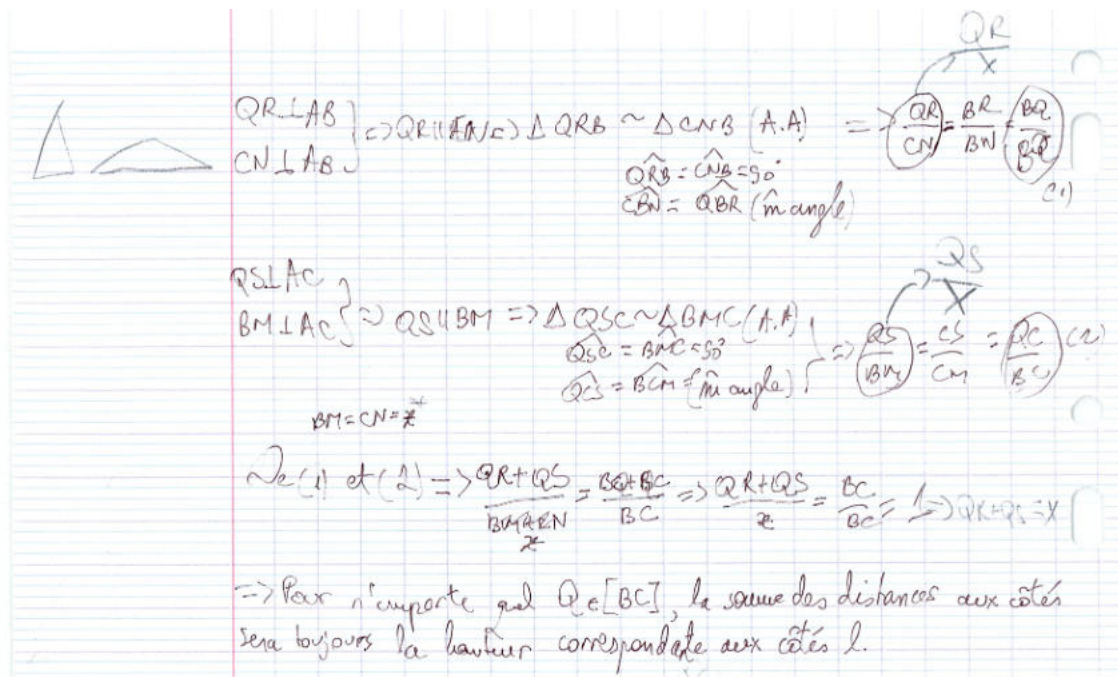
Pour conséquent, la somme des distances du point I aux 3 côtés du triangle est toujours la même.

Pour conclure quel que soit l'endroit où le surfeur plante sa tente la somme des 3 distances est toujours la même.

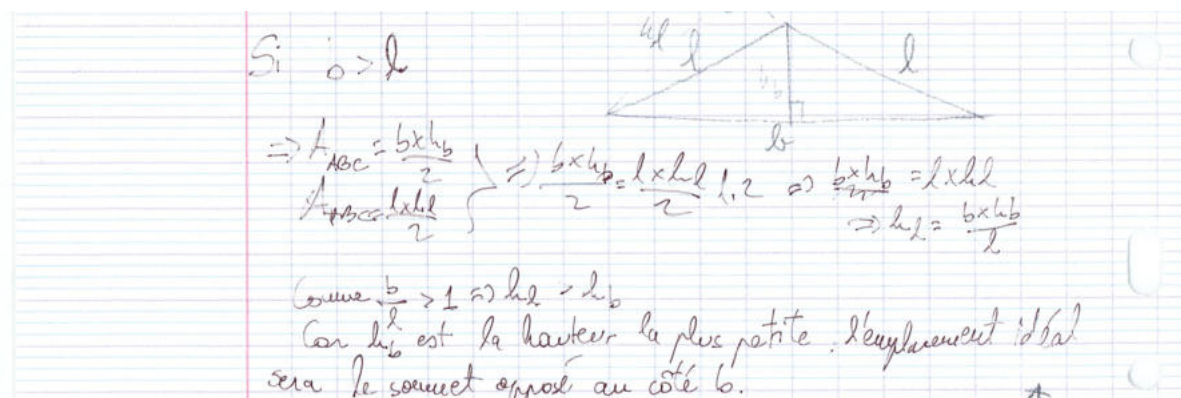
La deuxième solution détaille beaucoup moins la preuve pour le cas équilatéral (exactement la même que dans la première solution), mais explique ce qui se passe dans le cas de triangle isocèle ou quelconque.

Voici la démonstration pour le cas où l'île est un triangle isocèle de base $[BC]$

On constate que les triangles BCN et BQR sont en configuration de théorème de Thalès et sont donc semblables. De même pour les triangles CBM et CQS . Ce qui permet d'obtenir des rapports entre les longueurs :



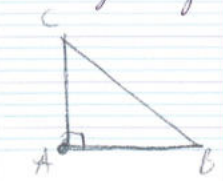
Cette conclusion (si on se place sur le côté [BC], la somme des distances aux côtés [AB] et [AC] est égale à la longueur des hauteurs issues de B et de C) permet de dire, que le résultat de la première partie n'est pas vraie ici : si on se place en A, la somme des distances est la hauteur issue du sommet principal qui est différente de la hauteur issue d'un sommet de la base si le triangle n'est pas équilatéral.



Ce résultat ne permet cependant pas trouver l'emplacement idéal car on ne sait rien de la somme des distances aux côtés si l'on se place ailleurs que sur la base ou sur le sommet principal du triangle.

3. Triangle quelconque ; $a < b < c$

Triangle rectangle



$$A_{ABC} = \frac{a \times h_a}{2}$$

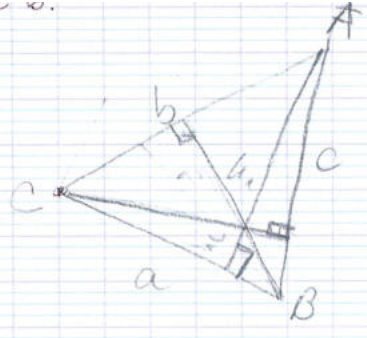
$$A_{ABC} = \frac{b \times h_b}{2}$$

$$A_{ABC} = \frac{c \times h_c}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a \times h_a}{2} = \frac{b \times h_b}{2} \Rightarrow a \times h_a = b \times h_b \Rightarrow h_b = \frac{a \times h_a}{b}$$

$$\frac{a \times h_a}{2} = \frac{c \times h_c}{2} \Rightarrow a \times h_a = c \times h_c \Rightarrow h_c = \frac{a \times h_a}{c}$$

On a $a < b < c$ donc $h_b < h_c$ car il est le plus petit.



Dans ce troisième cas, celui du triangle quelconque, l'équipe a montré le résultat suivant : la hauteur correspondant au plus grand côté est la plus petite, donc parmi les trois sommets, celui opposé au plus grand côté est le plus intéressant pour le surfeur.

Mais comme pour le cas du triangle isocèle, le placement à l'intérieur du triangle n'est pas étudié.

Problème 4

Soient m et n des entiers strictement positifs. On souhaite découper une planche sur laquelle est tracée une grille rectangulaire de dimensions $m \times n$. Cette opération se fait en plusieurs étapes, qu'on nomme coupes, qui doivent respecter les contraintes suivantes :

- On coupe sur les lignes de la grille.
- On coupe en ligne droite d'un bord à l'autre.
- Une fois que la planche est séparée en plusieurs pièces, on ne peut couper qu'une pièce à la fois.

Pour quelles valeurs de m et de n peut-on trouver une partition de la planche en dominos (c'est-à-dire des rectangles de dimensions 2×1 et 1×2) qu'il est impossible d'obtenir avec des telles coupes ?

Commentaire :

Pour répondre à la question posée, les deux équipes ont procédé de la même manière : elles ont étudié des petits cas d'abord pour constater que si le rectangle est « trop petit » alors toute grille est découppable. Il a fallu ensuite démontrer ce constat. Deux façons de procéder ont été tentées : faire la liste de tous les « petits cas » (trop lourd, difficile à montrer qu'aucun rectangle, ni aucune grille n'a été oubliée) et démontrer en regroupant les rectangles ayant une même longueur d'un des côtés. C'est cette stratégie qui est présentée ici, sur les trois premières pages.

Lors de l'étude de ces petits cas, les deux équipes ont trouvé deux grilles de taille 5×6 qui ne sont pas découppables. Une seule est présentée ici. Elles ont ensuite remarqué que si une telle grille est placée à l'intérieur d'une grille plus grande, la grande grille ne peut pas être découppée jusqu'au bout. Il a fallu alors montrer qu'on peut placer un rectangle 5×6 à l'intérieur de n'importe quel rectangle (avec au moins un côté pair, bien entendu) de telle sorte que le reste du grand rectangle soit pavable par des « dominos ». Ce qui constitue la deuxième partie de la solution.

Solution proposée :

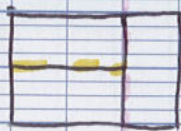
Problème de la grille • C2+

Imaginons qu'on a une grille rectangulaire de dimensions $m \times n$ et on veut la remplir de dominos sauf que l'on doit respecter certaines contraintes.

- On coupe sur les lignes de la grille
- On coupe en ligne droite d'un bord à l'autre
- Une fois que la planche est séparée en plusieurs pièces, on ne peut couper qu'une pièce à la fois

Par exemple le découpage de la grille est réalisable par les coupes autorisées seulement s'il existe à chaque étape une horizontale ou une verticale traversant toute une pièce sans couper de domino.

Ex:

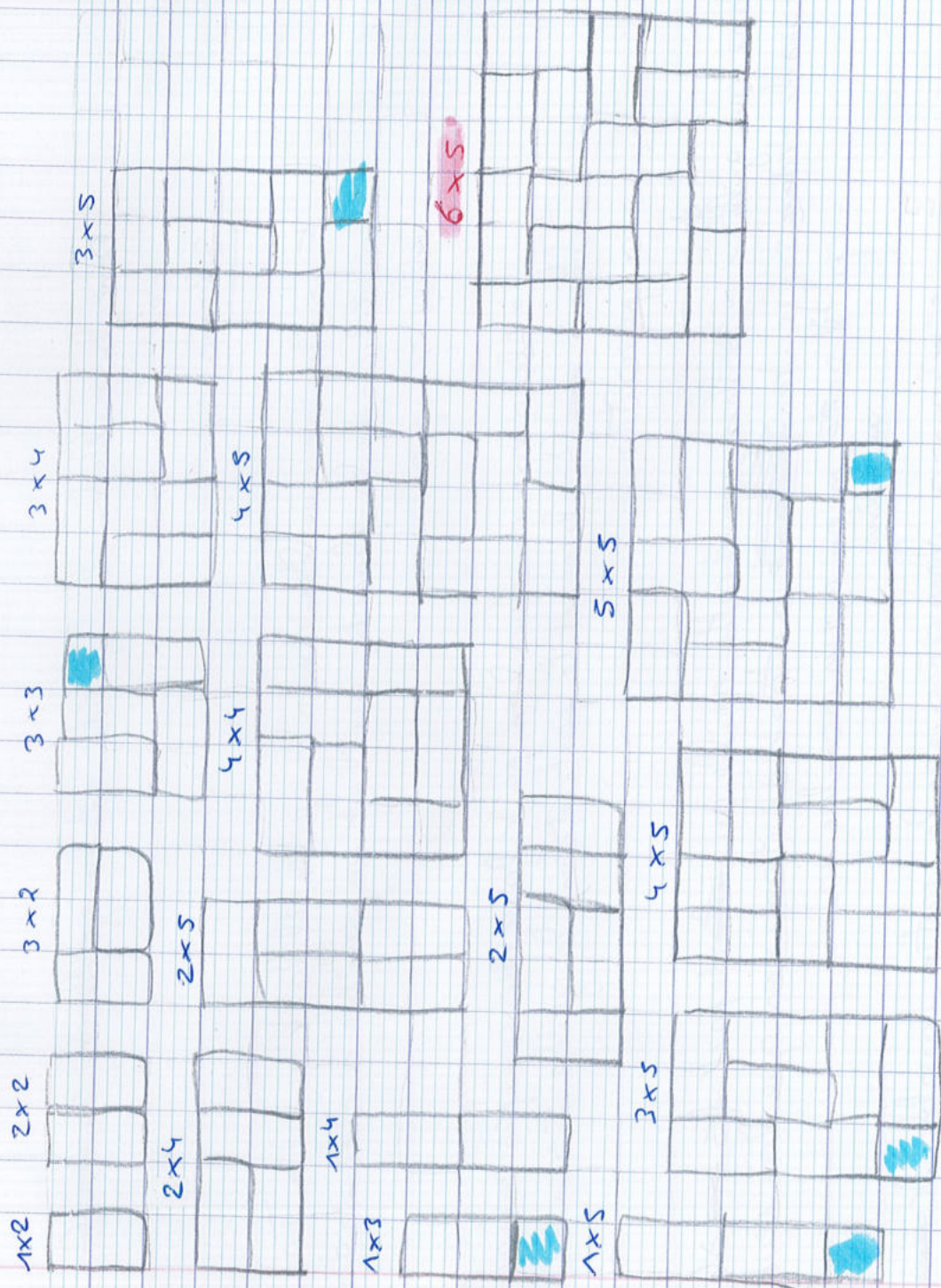


On peut toujours trouver une partition de la planche en dominos qu'il est possible d'obtenir avec de telles coupes lorsque n a comme valeur 6 et m a comme valeur 5 au minimum.

Pour qu'un rectangle $m \times n$ puisse être pavé par des dominos 1×2 , l'aire doit être paire puisque chaque domino a une aire de 2 donc une valeur (m ou n) doit obligatoirement être paire.

Ex: 7×7 a une aire de 49 donc il restera $1/2$ domino donc $(m; n) \neq (2t+1; 2p+1)$

Voici quelques exemples que l'on ne peut pas avoir de grille en dessous de 5×6 :

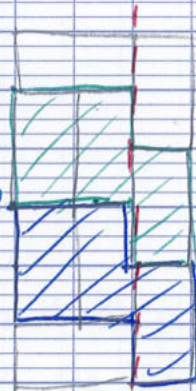


En dessous de 5 et 6 en valeur pour m et n , on pourra toujours obtenir des coupes franches donc toujours une coupe horizontale ou verticale ne traversant aucun domino et obtenir un domino seul à la fin lorsque l'aire est paire.

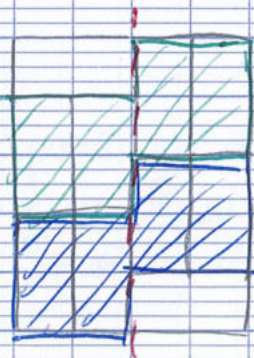
→ $1 \times k$ (avec $k \in \mathbb{N}$ pair) on peut toujours faire $\frac{k}{2} - 1$ coupes franches,

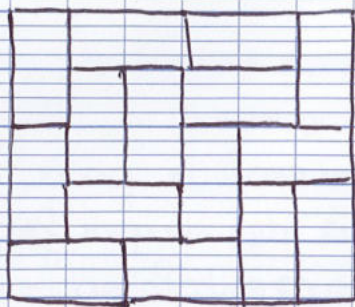
→ $2 \times x$ (avec $x \in \mathbb{N}$) on peut faire $x - 1$ coupes franches

→ Avec $3 \times k$, le m même modèle se répètera toujours et si on essaie de l'arrêter il y aura forcément une coupe franche.

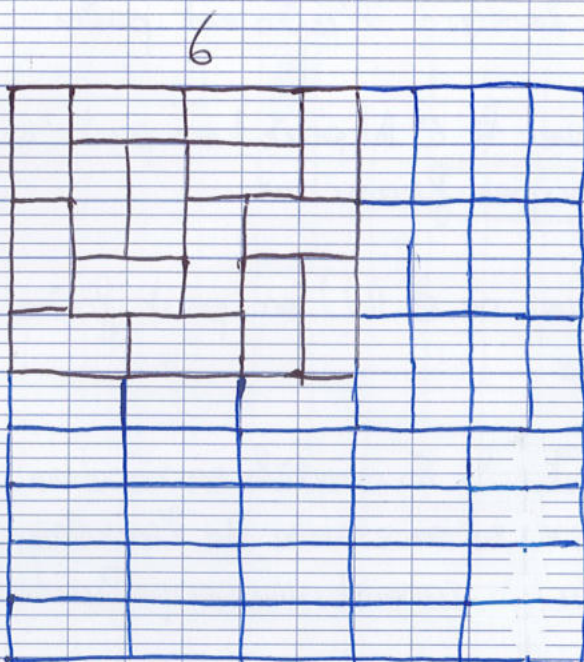


→ Avec $4 \times x$, le m même modèle se répètera toujours et si on essaie de l'arrêter il y aura aussi une coupe franche.





Avec cette base de 5 sur 6, qui n'est pas découparable en ligne droite d'un bord à l'autre donc c'est la plus petite grille.



Ensuite lorsque l'on coupe la grille, il faut que l'on trouve la partition de la planche qu'il est impossible à obtenir avec de telles coupes.

- Alors on a vu que l'on peut faire des coupes mais il faut obtenir la plus petite partition, la grille 5 sur 6 doit apparaître.
- Si l'on prend cette grille au départ (5x6) on peut faire une grille parable et donc rajouter autant de dominos que l'on veut tant qu'il reste au moins m ou n , un nombre pair.
- On pourra alors découper la partie parable et il restera toujours une partition non découparable.

donc on arrivera forcément à cette grille là alors il n'y a pas de grille maximale.

- Au moins l'un de m ou n est pair
Si m est pair $\Rightarrow m-6$ est pair, donc le rectangle $(m-6) \times n$ est parable.

Si m est pair $\Rightarrow (m-6) \times n$ est pair

Si m et n sont pairs $\Rightarrow (m-6) \times n$ est pair $\Rightarrow$ donc le rectangle est parable.

Problème 5

On dit qu'un polygone est convexe lorsque tous les angles internes sont inférieurs à 180° .

Dans ce problème on s'intéresse aux façons de plier des polygones convexes pour obtenir d'autres polygones. La règle est la suivante : on prend une feuille polygonale, on choisit deux sommets distincts A et B du polygone et plie le polygone le long de la médiatrice (d) du segment [AB] (ce qui revient à effectuer une symétrie axiale d'axe (d)). En particulier, le sommet A est replié sur le sommet B.

On dit qu'un pliage est convexe si le polygone obtenu est convexe.

1. *Décrire tous les pliés des polygones suivants.*
 - (a) *Les triangles équilatéraux, isocèles ou rectangles.*
 - (b) *Les triangles quelconques.*
 - (c) *Les polygones réguliers.*
2. *Soit $n \geq 3$ un entier.*
 - (a) *Combien de côtés au maximum peut avoir le plié convexe d'un polygone convexe à n côtés ?*
 - (b) *Et au minimum ?*

Commentaire :

L'objectif de la première question était d'acquérir un sens de la situation, de voir ce qui est possible et ce qui ne l'est pas. Les polygones roses que vous allez voir dans les pages suivantes sont en effet découpés et permettent de constater physiquement les différentes façons de plier des polygones particuliers. Essayez de vous en fabriquer et amusez-vous !

Encore une fois, les deux équipes ont proposé deux solutions avec les styles de rédaction très différents que nous vous proposons de comparer.

Solutions proposées :

Solution 1

(1) polygone convexe. Bonjours on va parler des

Un polygone est dit convexe lorsque tout segment reliant des sommets non consécutifs se trouvent entièrement à l'intérieur du polygone. Donc inférieure à 180° .

(2) On commence d'un polygone convexe puis on choisit deux sommets A et B. On plie le polygone le long de la médiatrice (d) du segment [AB]. Donc le sommet A est replié sur le sommet B.

(3) (d) soit la médiatrice de [AB]
le point milieu du segment [AB] et qui est perpendiculaire

Donc le nouveau polygone est encore convexe.

(4) On va commencer par décrire tout les plis du polygone

1(a) le triangle équilatéral.

(5) Il possède 3 axes de symétrie

Chaque sommet joue le même rôle.

A sur B
A sur C
B sur C } donne la même figure.

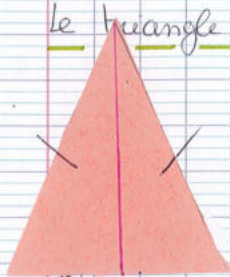
Donc $n = 3$ côté

Donc un seul type de pli.

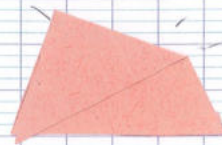
Le triangle équilatéral est le cas le plus simple car c'est le triangle le plus symétrique possible. Et comme tout pliage peut être vu comme superposition d'une partie de la figure avec le symétrique de l'autre, les axes de symétrie jouent un rôle majeur dans l'étude de ce problème. Plus il y a d'axes de symétrie, moins de figures différentes on peut obtenir.

(6)

le triangle isocèle



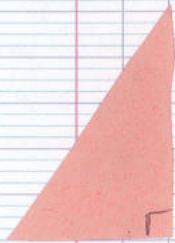
Donc $N=3$ etc ou



$N=4$

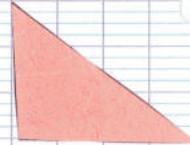
Il possède 1 seul axe de symétrie.
Donc 3 types de plis différents.

le triangle rectangle



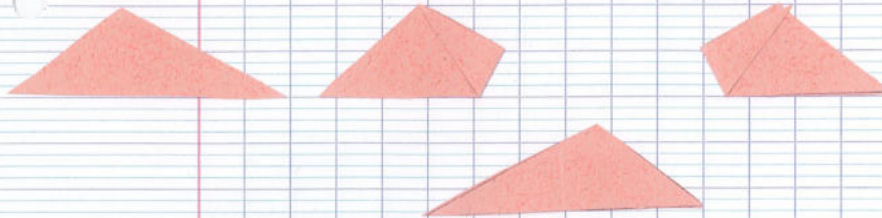
Il possède aucun axe de symétrie.
Donc 3 types de plis différents.

1.6b) le triangle quelconque (scalène)



Il possède aucun axe de symétrie.
Donc 3 types de plis différents.

le triangle obtu.

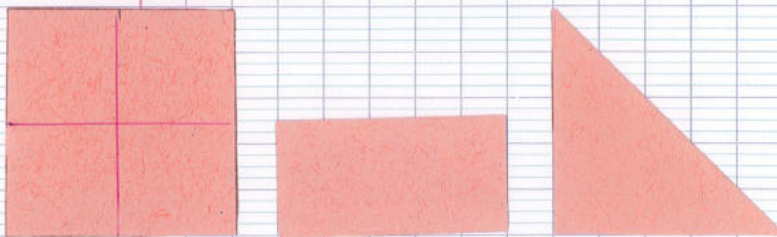


- Aucun axe de symétrie
- Donc 3 types de plus différents

Comme tout dépend des axes de symétrie plus le triangle a de symétrie moins il possède de pliages différents.

	nbx de symétrie	nbx de pliages différents
triangle équilatéral	3	1
isocèle	1	2
obtus rectangle quelconque	0	3

le carré



2 axes de symétrie
Donc 2 types de pliages différents

Le pentagone régulier

Il possède 5 côtés ($n=5$)

Pour les types de pliages différents :

- 1) 2 sommets voisins
- 2) 2 sommets séparés par un sommet

Soit 2 types de pliages différents.

L'hexagone régulier - 6 côtés ($n=6$)

- 1) 2 sommets voisins
- 2) 2 sommets séparés par un sommet
- 3) 2 sommets opposés

Donc 3 types de pliages différents.

L'octogone 8 côtés ($n=8$)

- 1) sommets voisins
- 2) distance de 2 sommets
- 3) distance de 3 sommets
- 4) sommets opposés.

Donc 4 types de pliages différents.

L'heptagone ($n=7$)

- 1) Sommets voisins
- 2) Sommets séparés par 2 sommets
- 3) Sommets séparés par 1 sommet.

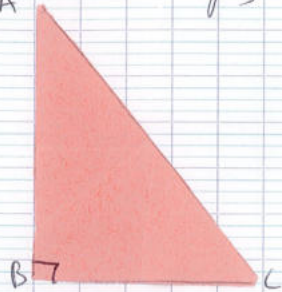
3 types de pliages différents

L'enneagone ($n=9$)

- 1) Sommets voisins
- 2) Sommets séparés par un sommet

i) (b) triangle rectangle:

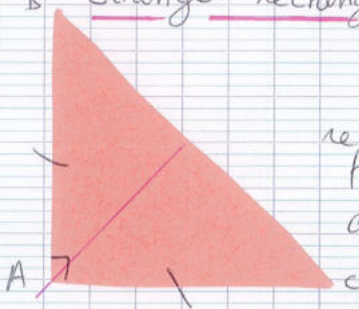
On a 3 façons différentes de plier



- 1) A sur C
- 2) A sur B
- 3) B sur C

A chaque façon de plier on obtiendra 4 côtés.

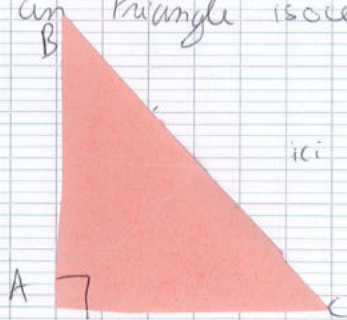
B Triangle rectangle isocèle:



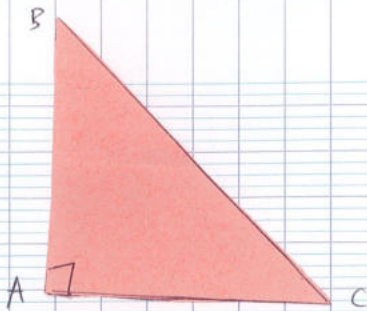
Contrairement au triangle rectangle on a comme le triangle isocèle 2 façons différentes de plier

- 1) B sur C (ou C sur B)
- 2) A sur B (ou A sur C)

Lorsque on plie sur son axe de symétrie on obtient un triangle isocèle

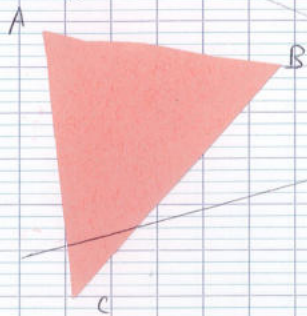


ici $n = 3$



Et lorsque'on plie
B sur A ou C sur A
on aura $n = 4$.

Le triangle quelconque



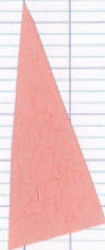
On aura 3 façons différentes
de plier et n sera toujours
égale à 4 et on a aucun axe
de symétrie

Triangle quelconque obtus



On aura aussi 3 façons
différentes de plier et $n = 4$
pour tout ses plis sur la médiatrice

Triangle quelconque aigu



3 façons différentes de plier
et comme les 2 autres triangles
on a $n = 4$

Maths C21

19.06.26

Résolution du problème 1: Polygones convexes2.b) Soit $n \geq 3$ un entier.

Un polygone comportant 3 côtés, un triangle, aura minimum 3 côtés après le pliage convexe. Un polygone ne peut pas avoir 2 côtés, sinon ce n'est plus un polygone mais un segment.

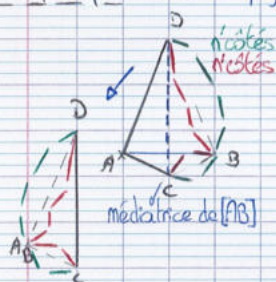
Exemple: Un triangle équilatéral formera un triangle rectangle, donc 3 côtés après le pliage convexe.

Un polygone comportant 4 côtés aura un minimum de 3 côté également après le pliage convexe.

Exemple: Un carré dans lequel A et B sont deux côtés opposés, qu'on plie sur la médiatrice du segment AB, donnera un triangle isocèle rectangle.

Obtenir un polygone à 3 côtés après un plié convexe d'un polygone à 5 ou plus côtés est impossible.

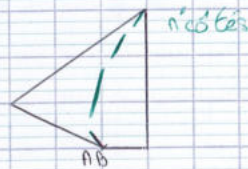
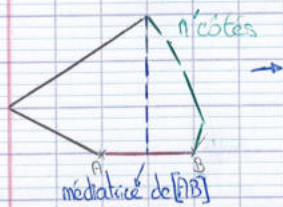
mise en pratique: Pour une figure à n côtés, $n \geq 5$, qui formerait un triangle après le pliage convexe, il faudrait que la partie que l'on replie soit plus petite que l'autre.



Par que la figure départ ai plus de 5 côtés il faut dessiner plusieurs côtés (3 ou plus) reliant C et D et passant par B. C'est impossible car les n côtés formeront soit une partie non convexe soit une partie trop grande.

Si on fait un pliage convexe sur un polygone à 5 ou plus côtés, on peut en obtenir un à 4 côtés, c'est le minimum.

mise en pratique: On peut dessiner autant de côtés que voulu tant que cette partie, lors du pliage, ne dépasse pas, et reste "cachée" dans la seconde partie.



n' correspond à $n - 3$

En résumé, pour les polygones à 3 ou 4 côtés, le minimum de côtés obtenu par un pliage convexe est de 3 côtés.

Par un polygone de 5 ou plus côtés, le résultat minimum obtenu est de 4, un quadrilatère.

Polygone régulier à nombre de côté pair:

Exemple: $n=6$

Pour un polygone régulier ayant un nombre de côté pair, il y a deux axes de symétries possibles différents. On peut avoir:

1^{er} Cas:

- La médiatrice traverse deux sommets opposés, donc:

$$\frac{6}{2} - 1 = 4$$

$\frac{6}{2}$: nombre de côtés initiaux
 $- 1$: côté de la médiatrice
 $= 4$: nombre de côté à l'arrivée

2^{ème} Cas:

- La médiatrice traverse deux milieux opposés de segments, donc:

$$\frac{6}{2} + 1 + 1 = 5$$

$\frac{6}{2}$: nombre de côtés initiaux
 $+ 1$: côté ajouté à cause de la médiatrice
 $+ 1$: côté ajouté à cause de la médiatrice
 $= 5$: nombre de côtés à l'arrivée

Propriété d'un pli par une médiatrice d'un polygone régulier à nombre de côté n pair.

1^{er} Cas:

$$\frac{n}{2} + 1$$

On prend le nombre de côté initial divisé par 2 et on ajoute le côté de la médiatrice

2^{ème} Cas:

$$\frac{n}{2} + 1 + 1$$

On prend le nombre de côté initial divisé par 2, on ajoute le côté de la médiatrice mais aussi la moitié du segment qui s'est fait couper par la médiatrice.

Groupe
3 et 4

Vendredi 19 juin 2026

Polygones irrégulier

1/c) $n = 5$ (pentagone)

Pour un polygone irrégulier de côté 5 il y a 3 type de pliage possibles avec les médiatrices.
Le plié a 4 côté la fin.

Pour éviter de toujours faire un plié nous utiliserons une formule capable de nous donner le nombre de côtés de plié.

$$\frac{n+1}{2} + 1$$

n est le nombre de côté de base

$n+1$ est le nombre de côté de base
+1 car $\frac{n}{2}$ nous donne un

nombre decimal, est un polygone
doit avoir un nombre entier de côté

on divise par 2 car après pliage
il nous reste qu'une moitié
Et nous faisons +1 car nous rajoutons
le côté plié

plié convexe de polygone

2. a. Combien de côtés au maximum

- On a vu qu'un triangle quelconque donne un quadrilatère rectangle.
Donc pour $n=3$ $n'=4$
ou n' désigne le nombre de côtés du plié convexe.

- Maintenant, cherchons pour d'autres valeurs de $n \geq 3$
Pour cela prenons l'exemple de la figure ci-dessous :



Pour une figure de n côtés, on obtient un plié convexe à $n+1$ côtés.
Pour cela il faut que la médiatrice du segment reliant 2 points côté à côté de manière à ce qu'aucun des côtés ne disparaissent et que le côté du plié soit ajouté.

On peut faire cela pour tous les polygones puisqu'on peut ajouter une infinité de petit côté.

Ainsi pour tous polygones à $n \geq 3$ côtés, ser plié convexe aura $n' = n+1$ au maximum

Problème 6

Une guirlande lumineuse comporte n petites lumières. Quand on l'allume, quelques lumières s'allument tout de suite (les mêmes à chaque fois) et les autres non. Ensuite la guirlande se comporte comme suit : au bout de chaque minute toutes les lumières qui étaient allumées s'éteignent et celles qui étaient éteintes mais avaient exactement une "voisine" allumée s'allument. Pour quelles valeurs de n peut-on choisir les lumières qui s'allument au départ de sorte que la guirlande ne s'éteigne jamais complètement (tant qu'on ne coupe pas le courant, bien évidemment) ?

Question supplémentaire : *que se passe-t-il si la guirlande est fermée ?*

Commentaire :

Ce problème est largement inspiré par le Jeu de la Vie (https://fr.wikipedia.org/wiki/Jeu_de_la_vie). Si vous ne connaissez pas ce jeu, allez le voir. C'est passionnant et très instructif.

La solution est basée sur l'observation suivante : si l'on peut trouver une configuration qui revient sur elle-même, alors cette configuration est éternelle (la guirlande ne s'éteint jamais). La réciproque est aussi vraie : comme le nombre de lumières ne change pas (contrairement au vrai Jeu de la Vie), il n'y a qu'un nombre fini de configurations distinctes, donc si une configuration de départ donne lieu à une guirlande qui ne s'éteint jamais, il y aura forcément un état de la guirlande qui va se répéter.

Toutes les démonstrations dans les solutions proposées par les deux équipes sont donc de l'un des deux types : soit on montre qu'une configuration de départ se transforme en une configuration éteinte, soit on trouve un état qui revient.

Les configurations éternelles proposées ici sont construites à partir d'une configuration de base : deux lumières dont l'une est allumée et l'autre est éteinte. Ce qui permet de construire les configurations éternelles pour tout nombre pair de lumières.

L'autre ingrédient est une lumière qui ne s'allume jamais, qui joue le rôle d'un « mur » entre deux parties éternelles d'une guirlande avec un nombre impair de lumières.

Solution proposée :

I. Dans un circuit ouvert

• Dans un circuit composé d'un nombre de lumière pair sous forme de 0 et 1 pour 0 éteint et 1 allumé le circuit perdurera à l'infini, soit minimum une solution

Exemple:

Pour 2 on a 10 et 01, à l'infini

• Pour tous nombre pair de lumière, $n = 2k$, pour k appartenant à $\mathbb{N}$, il existera une combinaison de lumière allumée et éteinte de sorte que la deuxième paire soit opposé à la première, donc les paires ne vont pas interagir.

Exemple:

Pour 4 on peut avoir 0110 puis 1001, à l'infini

- 0 est absurde car on ne peut pas avoir 0 lumière
- Une guirlande de une lumière s'éteint obligatoirement car elle ne peut agir sur aucune autre lumière.
- Une guirlande de 3 lumières s'éteint forcément car aucune configuration ne permet son fonctionnement.

Exemple:

Pour 3 on a 001, 010, 100 et 101, or dans chaque cas cela s'éteint.

• Pour tous nombre n impair de lumière, $n = 2k + 1$, k appartenant à $\mathbb{N}$, il existera au moins une solution si $k \geq 2$. On utilise le même système que pour les paires, en rajoutant un 0 qui n'est pas situé au bord, donc il n'interagira pas avec le reste.

Exemple

Pour 5 et 7

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}} \right\} \text{ pour } 5$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}} \right\} \text{ pour } 7$$

Or pour $n=1$; $n = 2 \times k + 1$ soit $2 \times 0 + 1$ donc on n'aura aucune paire de 2 qui ne permet pas de maintenir l'alternance allumé, éteint.

Et pour $n=3$; $n = 2 \times k + 1 = 2 \times 1 + 1$ donc on n'aura qu'une paire de 0 et 1 en plus d'un 0, ce qui mène à la même fin.

Pour conclure, l'ensemble des solutions est $\text{Sout} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 3\}$

II. Dans un circuit fermé

- Dans un circuit avec n pair $n=2R$:
 - avec R pair, on s'utilise le même fonctionnement que quand la guirlande est ouverte et avec un nombre de lumière pair.
 - avec R impair, on sépare la guirlande en deux, on met la moitié avec que des 0 et l'autre moitié commençant et finissant par 1, elles vont s'éteindre et s'allumer en alternance.
- Dans un circuit avec n impair $n=2R+1$, si R admet une solution dans un circuit ouvert alors n admet au moyen une solution.

Exemple:

Pour 7 on a $2R+1=2 \times 3+1$ or 3 $\notin S$ en ouvert donc 7 $\notin S$ en fermé.

- On utilise la solution de R ouvert, 2 fois en symétrique autour d'un 0 central.

Exemple:

Pour 11 on a $2R+1=2 \times 5+1$:



Pour conclure, l'ensemble des solutions est $S_{\text{fermé}} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 3, 7\}$

Explications du problème

guirlande
de base : 01
↳ 10
↳ 01...

↳ 100
↳ 010
↳ 101 → 000
Fin

Solutions nombre de lumières pair

↳ 0110 Plus grand : 011001...
↳ 1001 ↳ 100110...
↳ 0110 ↳ 011001...

Solutions nombre de lumière impair

1 lampe 1	1010101
↳ 0	↳ 10001
	↳ 01010
3 lampes 100	
↳ 010	0101001...
↳ 101	1000110...
↳ 000	0101001...
Fin	

Guirlandes fermées:

Schéma d'une boucle



Schéma ouvert

01100110...
jusqu'à $+\infty$

